This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

UC-NRLF
$B 36 300

Digitized by Google

THE LIBRARY
OF
THE UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

PRESENTED BY
PROF. CHARLES A. KOFOID AND
MRS. PRUDENCE W. KOFOID

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

2/6 BIND

THEORIE EN PRAKTIJK.

LEERBOEK DER REKENKUNDE

VOOR

HOOGERE BURGERSCHOLEN

DOOR

H. A. DERKSEN en G. L. N. H. DE LAIVE,
Leeraren aan de Hoogere Burgerschool te Nijmegen.

EERSTE DEEL.

ZUTPHEN,
W. J. THIEME & Cie.
1902.

Prijs ing. f 1.—, gecart. f 1.10.

Digitized by Google

Uitgaven v/h. Onderwijs van W. J. THIEME & Cie. te Zutphen.

Dr. G. BAKKER, Leerboek der Werktuigkunde, vooral ten dienste der H. B. S. ƒ 1,80

A. A. BEEKMAN, Aardrijkskunde van Nederland, ten dienste van a. s. onderwijzers en van Norm.- en Kweekscholen „ 1,50

id. Aardrijkskunde van Nederland, ten dienste van M. U. L. ond., Normaalsch., de laagste kl. v. H. B. S., Gymn. enz., 2e Leerb. „ 0,45

id. Aardrijkskunde van Nederland, voor de 3e en hoogere klassen van H. B. S., Gymn. enz., 3e Leerboekje „ 1,-

id. en SCHUILING, Schoolatlas v. Nederl., 3e dr., in 24 kaarten ing. ƒ 2,90, geb. „ 3,75

id. Schoolatlas v. d. Geheele Aarde, 2e druk, bevattende ruim 50 kaarten, benevens 100 kartons, ing. ƒ 3,90, geb. „ 4,90

D. BOSWIJK en W. WALSTRA, Het Levende Woord, 1e stukje, 5e dr. ƒ 0,75, 2e st. 4e dr. ƒ 0,90, 3e st. 3e dr. ƒ 1,—, 4e st. 2e dr.

id. Nederlandsche Spraakkunst, 2e druk „ 1,—

id. Vragen en Opgaven b/d Nederl. Spraakkunst, 2e druk „ 1,—

id. Bouwstoffen voor een 80tal Opstellen, 3e druk „ 0,50

BOUWMEESTER, Hebt Gij Uw kind lief? Schetsen voor ouders, onderwijzers en allen die met kinderen omgaan, ing. ƒ 1,50, geb. „ 0,75

S. J. H. BRUGMANS, Genealogische Tabellen, ten gebruike bij het onderwijs in de Geschiedenis „ 1,90

id. Historische Atlas, ten gebruike bij het onderwijs in de Vaderlandsche Geschiedenis. Tweede herziene en vermeerderde dr. ing. ƒ 1,—, geb. „ 0,75

S. DE BRUIN, Duitsch Woordenboek 2 dln. in een band „ 1,25

id. Engelsch „ 2 „ „ „ „ „ 4,90

id. Fransch „ 2 „ „ „ „ „ 4,90

id. A Dutchman's difficulties with the English language „ 3,90

id. Jean Firlefanz Jeune und die Deutsche Sprache „ 0,35

Dr. D. BRUINS, Beknopte Ned.-Latijnsche Woordenlijst. (Naar aanl. van Süpfle's Opstellen bewerkt), 2e z. verm. dr. „ 0,45

H. A. DERKSEN en G. L. N. H. DE LAIVE, Leerboek der Algebra m. vraagstukk., 1e dl., 3e dr., ƒ 1,25, 2e dl., 2e dr., ƒ 1,35, 3e dl., 2e dr. ƒ 1,35, 4e dl. Gecartonneerd 10 cent per deel hooger. „ 1,20

id. Antwoorden op deel I, II, III en IV, à „ 1,25

id. Leerboek der Vlakke Meetkunde m. Vraagst., dl. I ƒ 0,90, gecart. „ 0,35

dl. II ƒ 0,80, gecart. ƒ 0,90, dl. III ƒ 1,20, gecart. „ 1,—

A. VAN DISSEL, Deutsche Dichter und Prosaiker von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Ein Lesebuch für höhere Lehranstalten. Gebonden „ 1,30

Dr. J. J. DOESBURG en E. ZUIDEMA, Algemeene Geschiedenis, Leerboek v. H. B. S. en andere inrichtingen van voortgezet onderwijs „ 3,75

Deel I. Geschiedenis v/d Oudheid en de Middeleeuwen „ 1,25

„ II. Nieuwe Geschiedenis van 1492—1789 „ 1,—

„ III. Nieuwste Geschiedenis van 1789 tot onzen tijd „ 1,25

DOZY en BRUGMANS, Dr., Historische Atlas, 2e dr. ƒ 2,50, geb. „ 3,10

Examenopgaven v/d Hoofdacte in 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898 1899, 1900 en 1901, voorzien v/d antwoorden der vraagstukken

Dr. P. FOCKENS, Beknopte Geschiedenis der Nederlandsche Letterkunde ten gebruike bij het onderwijs „ 1,—

P. KAT Pz., Nederlandsche Spraakkunst, 3e druk „ 1,25

id. Beknopte Nederlandsche Spraakkunst met oefeningen, 2e dr. „ 1,50

id. Oefeningen, 5e druk „ 0,80

id. Woordenboekje der Nederlandsche Taal „ 0,50

A. J. KLEIN SWORMINK, Leerboek der Rekenkunde ten dienste der Gymnasia en H. B. S. „ 0,30

id. Regelmatige Veelvlakken „ 1,20

A. M. KOLLEWIJN Nzn., Geschiedenis van Nederlandsch Oost- en West-Indië. Tweede druk „ 0,60

J. KOONINGS, De School, 9e verm. druk, ing. ƒ 2,40, geb. „ 0,90

id. Leerboek der Paedagogiek, 2 dln., dl. I 4e dr., dl. II 4e dr. „ 2,90 „ 1,35

Digitized by Google

THEORIE EN PRAKTIJK.

Digitized by Google

Digitized by Google

THEORIE EN PRAKTIJK.

LEERBOEK DER REKENKUNDE

VOOR

HOOGERE BURGERSCHOLEN

DOOR

H. A. DERKSEN en G. L. N. H. DE LAIVE,

Leeraren aan de Hoogere Burgerschool te Nijmegen.

EERSTE DEEL.

ZUTPHEN,
W. J. THIEME & Co.,
1902.

Digitized by Google

Digitized by Google

QA 103
D44

VOORBERICHT.

Het onderwijs in rekenen neemt op de hoogere burgerscholen een eigenaardige plaats in. Onderwerpen, zooals: reeksen, logarithmen, exponentiëele vergelijkingen, samengestelde interestrekening komen in haast alle programma's voor onder het hoofd: Rekenkunde. En toch hooren ze eerder thuis bij de algebra dan bij de rekenkunde. Daarom hebben wij deze, die in de derde klasse behandeld worden, onaangeroerd gelaten.

Wij noemden ons boek „Theorie en Praktijk". Een volledig leerboek van de theorie der rekenkunde hebben wij niet willen geven, omdat veel, wat voor onderwijzers onmisbaar is, op onze scholen achterwege gelaten kan worden. Daarom hebben wij de verklaring van de hoofdbewerkingen met geheele getallen niet gegeven, maar wel de eigenschappen behandeld, waarop die bewerkingen berusten, en aanvankelijk aanschouwelijk, later door redeneering aangetoond; terwijl wij zoo spoedig mogelijk gebruik gemaakt hebben van letters, om een schakel te verkrijgen tot de algebraïsche bewerkingen.

Elk hoofdstuk hebben wij door een reeks opgaven doen volgen. De eerste van iedere reeks sluiten aan bij het theoretisch gedeelte. Wat de andere vraagstukken aangaat, hebben wij niet geaarzeld reeds bij de geheele getallen breuken onder de praktische vraagstukken op te nemen, daar ieder leerling der hoogere burgerschool met de toepassing ervan voldoende vertrouwd is. Ingewikkelde vraagstukken, die veel van het denkvermogen der leerlingen eischen en vaak voor hen raadsels schijnen, hebben wij zooveel mogelijk vermeden.

Waarom toch zou men de leerlingen kwellen met moeilijke rekenkundige oplossingen, wanneer een algebraïsche veel gemakkelijker is?

Enkele onderdeelen, zooals de talstelsels, som, aantal en produkt van de deelers van een getal, hebben wij opgenomen, omdat sommigen

Digitized by Google

onzer leerlingen, hetzij uit de derde klasse examen voor Alkmaar of Den Helder, of na de vijfde klasse examen voor Breda doen. Dat is ook de reden, waarom wij de derdemachtsworteltrekking opgenomen hebben. Wie deze onderwerpen niet noodig acht, kan ze zonder bezwaar voor hetgeen volgt overslaan.

Onmeetbare getallen en bewerkingen met onnauwkeurige getallen zijn niet behandeld. Deze liggen o. i. buiten de bevatting van leerlingen van 13 tot 16 jaar. Voor de onderwijzersakte worden ze niet eens geëischt, wel voor de hoofdakte. En wie al eens voor de hoofdacte heeft opgeleid, weet uit ervaring, wat een moeite de onderwijzers met deze onderwerpen hebben.

Verhoudingen en evenredigheden, die met eenige onderwerpen uit het handelsrekenen en de vierkants- en derdemachtsworteltrekking het tweede deel vormen, zijn met opzet uitvoerig behandeld en van vele vraagstukken voorzien. Wij zijn nl. van meening, dat onze leerlingen goed met evenredigheden overweg moeten kunnen met het oog op het veelvuldig gebruik ervan in de meetkunde.

Al is het onvolmaakt, wat we geven, wij hopen toch voor onze scholen iets bruikbaars geleverd te hebben en bevelen ons bij onze collega's voor raad en terechtwijzingen vriendelijk aan.

DE SCHRIJVERS.

NIJMEGEN, Juni 1902.

Digitized by Google

INHOUD.

Bladz.

Inleiding 1

Hoofdbewerkingen 5

Samentelling 5

Aftrekking. 6

Vermenigvuldiging 12

Gedurige produkten 17

Machten. 22

Deeling 25

Talstelsels 35

Herleiding van een getal uit het tientallig stelsel in een ander stelsel. 35

Herleiding van een getal, dat in een vreemd talstelsel geschreven is, tot het tientallig stelsel 37

Deelbaarheid 40

Kenmerken van Deelbaarheid. 44

Ontbinding in Factoren 55

Aantal deelers van een getal, hun som en hun produkt. . . . 58

Grootste Gemeene Deeler 61

Kleinste Gemeene Veelvoud 69

Digitized by Google

Bladz.

Breuken 72
Samentelling en Aftrekking. 79
Vermenigvuldiging 83
Gedurige produkten. 88
Machten. 89
Deeling 91
Samengestelde Breuken 95
Tiendeelige of decimale breuken 97
Samentelling en Aftrekking. 98
Vermenigvuldiging 99
Deeling 100
Herleiding van gewone breuken tot tiendeelige 102
Herleiding van repeteerende breuken tot gewone. 109
Metriek stelsel van Maten, Gewichten en Munten 112

Digitized by Google

INLEIDING.

1. Elk ding op zich zelf beschouwd heet een **eenheid.** Een knikker, een cent, een bank, een pen zijn eenheden. Een verzameling van eenheden van dezelfde soort b.v. van knikkers, van pennen, van centen heet een **hoeveelheid.** Om de grootte van een hoeveelheid centen te kennen, moet men die centen tellen. Die hoeveelheid kan bevatten: twee centen, of drie centen, of vier centen, of vijf centen enz. Twee, drie, vier, vijf.... duiden de **aantallen** der eenheden aan, waaruit de hoeveelheid bestaat; het zijn dus de uitkomsten, die men verkrijgt, als men de eenheden van een hoeveelheid gaat tellen. Men noemt ze **getallen.** Voor die getallen heeft men teekens aangenomen, die men **cijfers** noemt.

Bestaat een hoeveelheid uit 56 eenheden, en zijn die eenheden niet genoemd, dan heet 56 een **onbenoemd getal.** Zet men achter 56 den naam der eenheden, b.v. pennen, dan heet 56 pennen een **benoemd getal.** Een benoemd getal is dus eigenlijk een hoeveelheid. Van het getal 56 zegt men, dat het uit 56 eenheden bestaat en bedoelt daarmee, dat de hoeveelheid, die door telling het getal 56 oplevert, bestaat uit 56 eenheden. De onbenoemde eenheid noemt men het getal **één.**

Twee hoeveelheden heeten **gelijknamig,** als ze uit dezelfde eenheden bestaan, zooals een mandje met **32 appels** en een mandje met **48 appels.** Bestaan de hoeveelheden niet uit dezelfde eenheden, zooals 35 peren en 18 paarden, dan heeten die hoeveelheden **ongelijknamig.**

Ongelijknamige hoeveelheden kunnen soms tot gelijknamige gemaakt worden, zooals 3 guldens en 13 kwartjes; zij heeten dan **gelijksoortig.** Hoeveelheden, die niet gelijknamig gemaakt kunnen worden, heeten **ongelijksoortig.**

2. Somtijds bepaalt men de grootte eener hoeveelheid door deze niet bij enkele eenheden te tellen, maar bij meer dan een te gelijk.

Digitized by Google

Het aantal pennen uit een doosje kan men bij twaalven, bij dozijnen tellen. Twaalf pennen worden dan als een nieuwe eenheid beschouwd. Zulk een eenheid noemt men een **samengestelde eenheid.**

In plaats van te zeggen: een hoeveelheid bij enkele eenheden of bij twaalftallen **tellen** zegt men ook wel: een hoeveelheid met enkele of met twaalftallen van eenheden **meten.**

Alles wat men tellen of meten kan noemt men **een grootheid.**

Tellen kan men grootheden, waarvan de eenheden niet een samenhangend geheel vormen: een mand appels, een rolletje centen, een zak knikkers.

Meten kan men een grootheid, waarvan de eenheden wel een samenhangend geheel vormen: een vat bier, een zak meel, de lengte van een touw.

Een getal is dus de uitkomst van een telling of een meting.

3. De getallen hebben een groot aantal eigenschappen. Deze eigenschappen worden door redeneering uit elkaar afgeleid, d. i. **bewezen.** Die redeneering heet het **bewijs** van de eigenschap. Het is duidelijk, dat de eerste eigenschap, die wij van de getallen zullen noemen, uit geen andere kan afgeleid worden. Wij nemen die eigenschap zonder eenig bewijs aan, omdat de waarheid voor ons zoo duidelijk is, dat wij ze om zoo te zeggen voelen kunnen.

Heeft een jongen b.v. in zijn rechter broekzak 30 knikkers, en neemt hij er eenige uit die hij in zijn linkerzak stopt, andere weer die hij in de linkerhand houdt, en nog eenige die hij eerst in zijn vestzak duwt, om ze later in zijn linkerhand te nemen, dan zal niemand er aan twijfelen, of die jongen bezit nog precies evenveel knikkers, als hij er maar geen heeft laten vallen of van een ander er eenige heeft bijgekregen. Welnu, dit is de eerste eigenschap. Men drukt ze aldus uit:

Het aantal eenheden eener hoeveelheid verandert niet, als de eenheden in groepen verdeeld worden, en die weer willekeurig bij elkaar gevoegd worden.

Deze eerste eigenschap heet **grondeigenschap** of **axioma.**

4. Denken wij ons naast elkaar geplaatst twee manden met appels, die wij zullen merken met de letters A en B.

Men neemt uit A een appel en daarna ook een uit B, vervolgens weer een uit A en ook een uit B enz., eindelijk den laatsten uit

Digitized by Google

A en ook weer een uit B. Tegelijkertijd, dat men een appel uit A neemt, neemt men er ook een uit B. Zal daaruit nu volgen, dat de mand A evenveel appels als de mand B bevat? Immers neen; er konden in B nog appels overgebleven zijn. Wel zullen de hoeveelheden A en B gelijk zijn, als er in B geen meer overblijven.

Men noemt twee hoeveelheden **gelijk,** als met elke eenheid van de eerste een eenheid van de tweede hoeveelheid overeenkomt en deze geen andere eenheden meer bevat.

Komt met elke eenheid van de eerste hoeveelheid een eenheid van de tweede overeen en blijven hier nog eenheden over, dan zegt men dat de tweede hoeveelheid **grooter** is dan de eerste, of de eerste **kleiner** dan de tweede.

Voor de uitdrukking **gelijk aan** gebruikt men het teeken =, voor **grooter dan** het teeken >, en voor **kleiner dan** het teeken <.

56 appels = 56 appels; 14 centen > 9 centen;
12 guldens < 31 guldens.

Zijn twee hoeveelheden gelijk en voegt men bij beide een zelfde aantal eenheden, dan zijn de nieuwe hoeveelheden weer gelijk. Eveneens als men van beide een zelfde aantal eenheden afneemt.

Zijn twee hoeveelheden A en B gelijk, en voegt men bij de eerste hoeveelheid meer eenheden dan bij de tweede, dan zijn de nieuwe hoeveelheden ongelijk. A bevat meer eenheden dan B en is grooter dan B.

Neemt men van de gelijke hoeveelheden A en B ongelijke aantallen eenheden af, van A meer dan van B, dan zijn de overblijvende hoeveelheden niet meer gelijk. Nu bevat A minder eenheden dan B en is kleiner dan B.

Dit alles kan men ook op getallen overdragen:

Men noemt twee getallen **gelijk,** *als met elke eenheid van het eene getal een eenheid van het andere overeenkomt, en er hierbij geen eenheden meer overblijven.*

Een getal heet **kleiner** *dan een ander, als met elke eenheid van het eerste getal een eenheid van het tweede overeenkomt en er bij het tweede nog eenheden overblijven; het tweede heet dan* **grooter** *dan het eerste.*

Als men gelijke getallen met gelijke getallen vermeerdert of vermindert, zijn de nieuwe getallen weer gelijk.

Als men gelijke getallen met ongelijke getallen vermeerdert, zijn de nieuwe getallen ongelijk; waar het meest is bijgevoegd, ontstaat het grootste getal.

Digitized by Google

Als men gelijke getallen met ongelijke getallen vermindert, zijn de nieuwe getallen ongelijk; waar het meest is afgenomen ontstaat het kleinste getal.

Opmerking. In het voorgaande hebben wij gezegd, wat men onder een eenheid, een hoeveelheid, een getal verstaat. Wij hebben een **bepaling** of **definitie** van die begrippen gegeven.

Een bepaling van iets geeft altijd antwoord op de vraag: **wat is een....?**

Geef nu eens een bepaling van:

een eenheid, een hoeveelheid, een getal, een benoemd getal, gelijksoortige getallen, een samengestelde eenheid, een grootheid.

Digitized by Google

HOOFDBEWERKINGEN.

Samentelling.

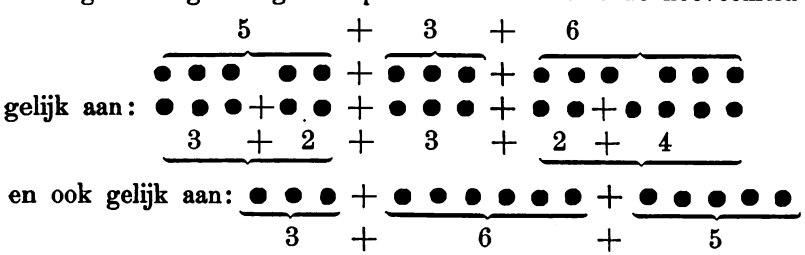
5. Bepalingen. *De* **samentelling** *is een bewerking, die ons al de eenheden van twee of meer getallen leert vereenigen tot een enkel getal, dat* **som** *heet.*

De getallen, die samengeteld moeten worden, heeten de **termen** *der som.*

In plaats van te zeggen: **„tel 7 op bij 5"**, zegt men ook wel: **„vermeerder 5 met 7".**

Om aan te duiden, dat men twee of meer getallen moet samentellen, plaatst men die getallen naast elkaar met het teeken + (plus) tusschen elke twee op elkaar volgende.

Volgens de grondeigenschap der rekenkunde is de hoeveelheid



Dat is in woorden:

Eigenschap. Een som verandert niet van waarde, als men eenige termen dier som in deelen splitst, of de termen in willekeurige volgorde samentelt.

Opgaven.

1. Hoe zult ge de som bepalen van:
   $17 + 13$; $15 + 48$; $14 + 17 + 33 + 26$; $83 + 27$;
   $15 + 19 + 18 + 23$; $27 + 18 + 16 + 55$?

Digitized by Google

2. Tel samen:

5	dagen	17	uren	48	min.	37	sec.
9	„	19	„	34	„	24	„
2	„	21	„	53	„	56	„
5	„	8	„	12	„	32	„

3. Een papierhandelaar levert aan een klant 2 baal 8 riem en 5 boek; 7 baal 5 riem 4 boek; 9 baal 7 riem 15 boek en 3 baal 5 riem 12 boek. Hoeveel papier heeft hij geleverd?

   Aanwijzing: een baal = 10 riem; een riem = 20 boek; een boek = 24 vel.

4. Bereken:

   7 groot gros 5 gros 9 dozijn 10 stuks + 2 groot gros 6 gros 8 dozijn 9 stuks + 8 groot gros 4 gros 5 dozijn 10 stuks penhouders.

   Aanwijzing: een groot gros = 12 gros, een gros = 12 dozijn, een dozijn = 12 stuks.

Aftrekking.

6. Bepalingen. *De* **aftrekking** *is een bewerking, die ons een getal leert vinden, dat bij het eene van twee getallen opgeteld moet worden, om het andere tot som op te leveren.*

Het te vinden getal heet **verschil** *of* **rest;** *waar het bij opgeteld moet worden heet* **aftrekker,** *en het getal, dat de som moet worden, is het* **aftrektal.**

Het aantal eenheden uit het aftrektal is dus gelijk aan het aantal eenheden uit aftrekker en verschil samen.

Neemt men dus van het aftrektal den aftrekker af, dan houdt men het verschil over.

Het verschil is dus ook het getal, dat men verkrijgt, als men van het aftrektal den aftrekker afneemt.

In plaats van te zeggen: **„trek 5 van 7 af"**, zegt men ook wel: **„verminder 7 met 5".**

De aftrekking duidt men aan, door eerst het aftrektal te plaatsen, daarna het teeken — (min) en dan den aftrekker:

$$17 - 5.$$

Uit de bepaling volgt:

verschil + aftrekker = aftrektal

Digitized by Google

en ook:

aftrektal — verschil = aftrekker.

Als meer dan twee getallen door de teekens + en — verbonden zijn, zooals:

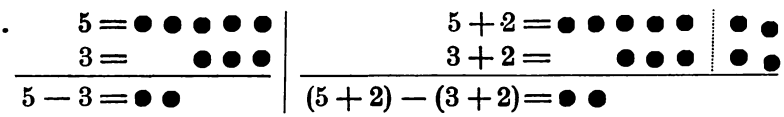
$$15 + 7 - 8 + 3 + 9 - 5 - 6,$$

dan voert men die bewerkingen uit in de volgorde van links naar rechts.

Men lette op het onderscheid tusschen **7 + 4** en **(7 + 4)**. De eerste schrijfwijze stelt een bewerking voor nl. een samentelling; de tweede de uitkomst der bewerking, dus een som.

Evenzoo stelt **7 — 4** een aftrekking voor en **(7 — 4)** de uitkomst der aftrekking, dus een verschil.

7.



Bij 3 eenheden moet men 2 eenheden optellen om 5 eenheden te krijgen, daarom is 2 het verschil tusschen 5 en 3:

$$5 - 3 = 2.$$

Uit onze figuren blijkt, dat het verschil 2 blijft, als men bij het aftrektal en bij den aftrekker evenveel eenheden optelt.

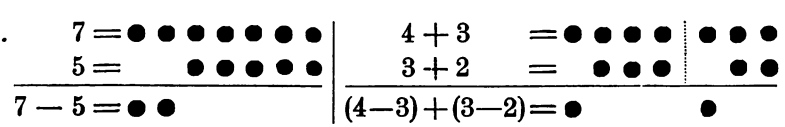
En gaat men van de tweede figuur tot de eerste over, dan ziet men, dat het verschil niet verandert, als men aftrektal en aftrekker met evenveel eenheden vermindert.

Wij hebben dus:

Eigenschap I. Een verschil verandert niet, als men aftrektal en aftrekker met een zelfde getal vermeerdert of vermindert.

Opgave. Verklaar: $27 - 17 = 20 - 10 = 10$
$83 - 43 = 80 - 40 = 40$
$97 - 37 = 100 - 40 = 60.$

8.



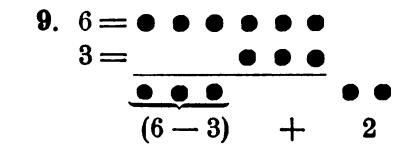
Het verschil van 7 en 5 is 2; dit zelfde verschil verkrijgt men ook, als men 7 splitst in 4 + 3 en 5 in 3 + 2, vervolgens het verschil van 4 en 3 bepaalt, daarna dat van 3 en 2, en die twee verschillen samenvoegt.

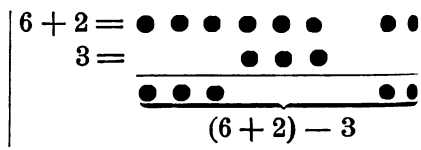
Digitized by Google

Eigenschap II. Een verschil verandert niet, als men aftrektal en aftrekker in deelen splitst; de deelen van den aftrekker van de overeenkomstige deelen van het aftrektal aftrekt en de verkregen verschillen samentelt.

Opgave. Verklaar: $89 - 37 = (80 - 30) + (9 - 7)$
$95 - 48 = (80 - 40) + (15 - 8)$
$70 - 36 = (60 - 30) + (10 - 6)$.

9.

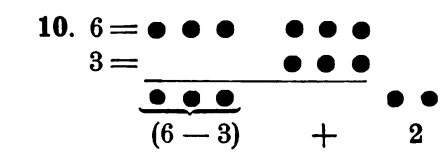


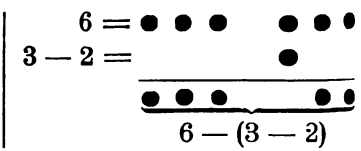


In de eerste figuur is het verschil van 6 en 3 met 2 vermeerderd; in de tweede figuur is 6 eerst met 2 vermeerderd en toen het verschil bepaald van $6 + 2$ en 3. In beide figuren staan onder de streep evenveel eenheden. Wij leeren hieruit:

Eigenschap III. Een verschil wordt met een getal vermeerderd, als men dit optelt bij het aftrektal.

10.

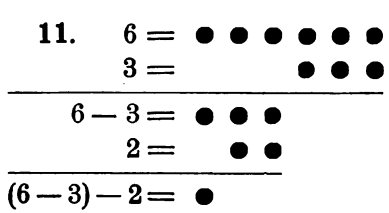


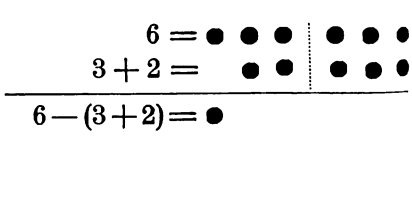


Uit een aandachtige beschouwing dezer figuren leeren wij:

Eigenschap IV. Een verschil wordt met een getal vermeerderd, als men dit aftrekt van den aftrekker.

11.



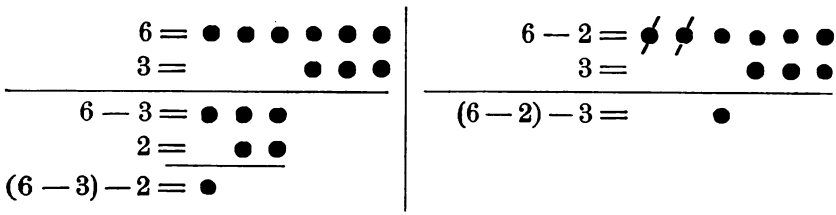


Uit deze figuren leeren wij:

Eigenschap V. Een verschil wordt met een getal verminderd, als men dit optelt bij den aftrekker.

Digitized by Google

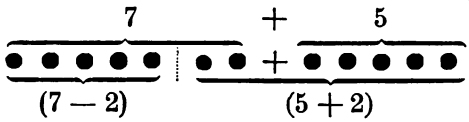
12. En uit een beschouwing der volgende figuren



leeren wij:

Eigenschap VI. Een verschil wordt met een getal verminderd, als men dit aftrekt van het aftrektal.

13. En eindelijk leeren wij nog uit deze laatste figuur



Eigenschap VII. De som van twee getallen verandert niet, als men het eene getal met een derde vermindert, mits men het tweede er mee vermeerdert.

14. Zij gegeven $15 + 7 - 8 + 3 + 9 - 5 - 6$.

Volgens § 6 is de beteekenis hiervan, dat de som van 15 en 7 moet verminderd worden met 8, hetgeen men volgens diezelfde paragraaf duidelijk aanwijst door:

$$(15 + 7) - 8.$$

Dit verschil moet vermeerderd worden met 3, hetgeen men kan doen door het aftrektal met 3 te vermeerderen:

$$(15 + 7 + 3) - 8. \qquad (\S\ 9.)$$

Dit moet weer met 9 vermeerderd worden en is om dezelfde reden

$$(15 + 7 + 3 + 9) - 8.$$

Hiervan moet 5 afgenomen worden, hetgeen men doen kan door den aftrekker met 5 te vermeerderen:

$$(15 + 7 + 3 + 9) - (8 + 5) \qquad (\S\ 11.)$$

Eindelijk moet dit verschil nog met 6 verminderd worden, waarvoor men om dezelfde reden vindt:

$$(15 + 7 + 3 + 9) - (8 + 5 + 6)$$

Uit het bovenstaande volgt:

Eigenschap VIII. Als achtereenvolgens eenige getallen moeten opgeteld en afgetrokken worden, kan men de

Digitized by Google

uitkomst verkrijgen door de som der aftrekkers af te nemen van de som der andere getallen.

15. De hier behandelde eigenschappen der aftrekking kunnen wij met letters aldus voorstellen:

$$a - b = (a + c) - (b + c);$$
$$a - b = (a - c) - (b - c);$$

Als $A = a + b + c + d$ en $B = p + q + r + s$ is, dan is

$$A - B = (a - p) + (b - q) + (c - r) + (d - s);$$
$$(a - b) + c = (a + c) - b;$$
$$(a - b) + c = a - (b - c);$$
$$(a - b) - c = a - (b + c);$$
$$(a - b) - c = (a - c) - b;$$
$$a + b = (a + c) + (b - c);$$
$$a - b + c + d - e - f = (a + c + d) - (b + e + f).$$

Opgaven.

1. Omschrijf de beteekenis der volgende vormen:
   $(27 - 15) - 3$; $(72 - 17) + 13$; $(25 + 13) - (9 + 17)$.
2. Op welke eigenschappen berusten de volgende herleidingen:
   $(48 - 23) + 7 = 48 - 16$; $(59 - 41) - 9 = 50 - 41$;
   $(95 - 28) + 3 = 98 - 28 = 90 - 20$;
   $74 - 29 = 75 - 30$; $48 + 57 = 50 + 55$?
3. Bereken op twee manieren:
   $(400 - 190) + 110$; $(720 - 380) - 100$.
4. Als men 37 gld. moet verminderen met 19 gld. kan men dat doen, door van 37 gld. eerst 7 gld. af te nemen, van die uitkomst 10 gld. en van de rest 2 gld. Waarop steunt die bewerking?
5. Waaraan is aftrektal + aftrekker + verschil gelijk?
   Waaraan is aftrektal + aftrekker − verschil gelijk?
   Waaraan is aftrektal − aftrekker + verschil gelijk?
6. Verdeel het getal 84 in twee deelen, die 16 verschillen.
7. Twee personen verschillen in leeftijd 12 jaren en 5 maanden. Als zij samen 48 jaren en 3 maanden oud zijn, hoe oud is dan ieder?
8. Druk de volgende waarheid in woorden uit:
   $$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$
   Kunt ge ze ook bewijzen?
9. De omtrek van een rechthoekig stuk land bedraagt 360 M.

Digitized by Google

Als de breedte 15 M. minder is dan de lengte, hoeveel HA is dat land dan groot?

10. Van een aftrekking is de som van aftrektal, aftrekker en verschil 168, terwijl het verschil tweemaal den aftrekker is. Bepaal die aftrekking.
11. Van een aftrekking is het verschil 65. Vermeerdert men den aftrekker met de helft van het aftrektal, dan wordt het verschil 15. Welke is die aftrekking?
12. A en B hebben samen 120 cent. Geeft A drie centen aan B, dan heeft A evenveel dubbeltjes als B stuivers. Hoeveel centen heeft ieder?
13. A en B verschillen nu 20 jaren in leeftijd. Over 5 jaren is A tweemaal zoo oud als B. Hoe oud is ieder thans?
14. Iemand koopt thee en koffie, samen voor 400 gld. Had hij voor de thee 60 gld. meer en voor de koffie 40 gld. meer besteed, dan zou hij voor de koffie $1\frac{2}{3}$ maal zooveel guldens besteed hebben als voor de thee rijksdaalders. Hoeveel guldens heeft hij voor ieder besteed?
15. De omtrek van een stuk land is 198 M. Maakt men het land $25\frac{1}{2}$ M. korter, maar ook $25\frac{1}{2}$ M. breeder, dan is het juist een vierkant. Hoeveel A. bedraagt de oppervlakte van dat land?
16. Bereken het $\frac{5}{8}$ deel van 3 jaar, 7 maanden en 13 dagen. (1 mnd. = 30 dagen).
17. A kan een werk in 15 dagen afmaken, B in 12 en C in 10 dagen.

a. Welk deel doet ieder per dag? Welk deel doen ze samen per dag? In hoeveel dagen kunnen ze het heele werk samen doen?

b. Hoeveel maal kan A datzelfde werk in 60 dagen afmaken; hoeveel maal B en hoeveel maal C? Hoeveel maal kunnen ze samen dat werk in 60 dagen afmaken? Hoeveel dagen hebben ze noodig om dat werk samen éénmaal af te maken?

18. A kan een werk verrichten in $\frac{3}{4}$ uur, B in $\frac{2}{3}$ uur. Hoeveel maal kunnen ze dat werk samen in 1 uur afmaken?
19. Als iemand 20 % van den inkoop wint, hoeveel percent wint hij dan van den verkoop? Welk deel is de winst van de som van in- en verkoop?
20. Als de winst $12\frac{1}{2}$ % van den verkoop bedraagt, hoeveel percent wint men dan van den inkoop?

Digitized by Google

Vermenigvuldiging.

16. Bepalingen. *De* **vermenigvuldiging** *is een bewerking, die ons de som van eenige gelijke getallen op een kortere wijze leert vinden dan door de gewone optelling.*

Het getal, dat het aantal gelijke getallen aanwijst, heet **vermenigvuldiger;** *elk der gelijke getallen heet* **vermenigvuldigtal** *en de uitkomst heet* **produkt.**

In plaats van $5+5+5+5$ schrijft men 4×5 **of** $4 . 5$. Het vermenigvuldigtal staat dus rechts van den vermenigvuldiger; tusschen beide staat het teeken **maal** of een **stip.**

Wat beteekent: 3×7 gld., en 5 gld. $\times 4$?

Vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger dragen ook wel den naam van **factoren;** het vermenigvuldigtal is de **eerste factor,** de vermenigvuldiger de **tweede factor.**

Het vermenigvuldigtal kan benoemd of onbenoemd zijn; de vermenigvuldiger is steeds een onbenoemd getal.

Omdat de vermenigvuldiger het aantal gelijke getallen aanwijst, waarvan de som bepaald moet worden, daarom moet de vermenigvuldiger grooter zijn dan 1.

1×37 is dus eigenlijk geen produkt; het duidt enkel aan, dat men 1 keer 37 eenheden heeft.

Evenzoo zijn 0×37 en 37×0 geen produkten.

Toch noemt men 1×37, 0×37 en 37×0 ook produkten, waarvan de uitkomsten respectievelijk 37, 0 en 0 zijn.

Bij de eigenschappen, die wij in de volgende paragrafen zullen behandelen, hebben wij steeds het oog op onbenoemde getallen.

Ook lette men op het verschil in beteekenis tusschen 8×5 en (8×5).

Moet het produkt bepaald worden van een getal en een som, of van een getal en een verschil, dan moet de som of het verschil tusschen haakjes geplaatst worden.

Men lette dus op het verschil in beteekenis tusschen:

$$5 \times (8+7) \text{ en } 5 \times 8+7$$
$$9 \times (12-4) \text{ en } 9 \times 12-4.$$

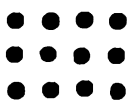
17. Eigenschap I. Het produkt van twee getallen verandert niet, als men de factoren verwisselt.

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Digitized by Google

Bewijs.

3×4 is de som van drie getallen, ieder gelijk aan 4 eenheden. Men kan die som aldus voorstellen:



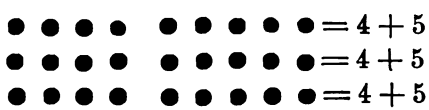
En deze som verandert niet, als men ze verdeelt in 4 kolommen ieder van drie eenheden. Zij is dus ook gelijk aan 4×3.

18. Eigenschap II. Een som wordt vermenigvuldigd met een getal, door elken term der som met dat getal te vermenigvuldigen en die produkten samen te tellen.

$$3 \times (4 + 5) = 3 \times 4 + 3 \times 5.$$

Bewijs.

$3 \times (4 + 5)$ is de som van drie getallen ieder gelijk aan $4 + 5$. Zij kan dus voorgesteld worden door:



Deze som mag men splitsen in twee kolommen, waarvan de eerste driemaal 4 en de tweede driemaal 5 eenheden bevat. Zij is dus ook gelijk aan: $3 \times 4 + 3 \times 5$.

Toepassing.
$$7 \times 28 = 7 \times 20 + 7 \times 8$$
$$8 \times 29 = 8 \times 25 + 8 + 4$$
$$4 \times 28 \text{ ct.} = 4 \text{ kw.} + 12 \text{ ct.} = 112 \text{ ct.}$$

19. Leest men de eigenschap

$$3 \times (4 + 5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$$

van rechts naar links, dan verkrijgt men:

Eigenschap III. De som van twee produkten met gemeenschappelijken vermenigvuldiger is gelijk aan de som der vermenigvuldigtallen, vermenigvuldigd met den gemeenschappelijken vermenigvuldiger.

Hoeveel is: $8 \times 16 + 8 \times 9$,
$9 \times 15 + 9 \times 25$?

20. Eigenschap IV. Een getal wordt met een som vermenigvuldigd, door dat getal met elken term der

Digitized by Google

som te vermenigvuldigen en de komende produkten samen te tellen.

$$(7+8)\times 13 = 7\times 13 + 8\times 13.$$

Bewijs.

Volgens eigenschap I is

$$(7+8)\times 13 = 13\times (7+8),$$

en dit is volgens eigenschap II gelijk aan:

$$13\times 7 + 13\times 8.$$

Past men op elk produkt dezer uitkomst weer eigenschap I toe, dan krijgt men:

$$7\times 13 + 8\times 13.$$

Toepassing.

$$16\times 9 = 10\times 9 + 6\times 9$$
$$27\times 6 = 20\times 6 + 7\times 6.$$

21. Leest men de eigenschap

$$(7+8)\times 13 = 7\times 13 + 8\times 13$$

van rechts naar links, dan krijgt men:

Eigenschap V. De som van twee produkten met gemeenschappelijk vermenigvuldigtal is gelijk aan de som der vermenigvuldigers maal het gemeenschappelijk vermenigvuldigtal.

Hoeveel is: $9\times 18 + 11\times 18$

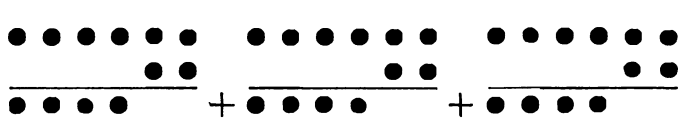
$27\times 36 + 3\times 36$?

22. Eigenschap VI. Een verschil wordt vermenigvuldigd met een getal, door aftrektal en aftrekker er mee te vermenigvuldigen en het eerste produkt te verminderen met het tweede.

$$3\times (6-2) = 3\times 6 - 3\times 2.$$

Bewijs.

$3\times (6-2)$ kan men aldus voorstellen



Deze figuur stelt echter ook het verschil voor van 3×6 en 3×2, of $3\times 6 - 3\times 2$.

Toepassing. $9\times 48 = 9\times 50 - 9\times 2$

$7\times 69 = 7\times 70 - 7\times 1.$

Digitized by Google

23. Verklaar, hoe men uit deze eigenschap kan afleiden:

Eigenschap VII. Het verschil van twee produkten met gelijken vermenigvuldiger is gelijk aan het verschil der vermenigvuldigtallen vermenigvuldigd met den gemeenschappelijken vermenigvuldiger.

24. Eigenschap VIII. Een getal wordt vermenigvuldigd met een verschil, door dat getal met het aftrektal en met den aftrekker te vermenigvuldigen en het eerste produkt te verminderen met het tweede.

$$(13 - 7) \times 18 = 13 \times 18 - 7 \times 18.$$

Bewijs.

Volgens de eerste eigenschap is

$$(13 - 7) \times 18 = 18 \times (13 - 7),$$

en dit is volgens eigenschap VI gelijk aan:

$$18 \times 13 - 18 \times 7.$$

Past men nu op deze twee produkten weer eigenschap I toe, dan krijgt men: $13 \times 18 - 7 \times 18.$

Toepassing. $28 \times 12 = 30 \times 12 - 2 \times 12,$

$37 \times 25 = 40 \times 25 - 3 \times 25.$

25. Hoe kan men uit de vorige eigenschap afleiden:

Eigenschap IX. Het verschil van twee produkten met hetzelfde aftrektal is gelijk aan dat aftrektal vermenigvuldigd met het verschil der vermenigvuldigers?

26. Met behulp van letters kan men de vorige eigenschappen ook gemakkelijk uitdrukken. In een produkt van letterfactoren is men gewoon de teekens $\times$ of . weg te laten. In plaats van $a \times b$ of $a \,.\, b$ schrijft men ab.

De leerling drukke de volgende gelijkheden in woorden uit:

$$ab = ba$$
$$a(b + c) = ab + ac$$
$$pq + pr = p(q + r)$$
$$(b + c)d = bd + cd$$
$$ar + br = (a + b)r$$
$$x(y - z) = xy - xz$$
$$ab - ac = a(b - c)$$
$$(x - y)z = xz - yz$$
$$ab - cb = (a - c)b$$

Digitized by Google

Opgaven.

1. Schrijf in den vorm van een enkel produkt:
   $3 \times 4 + 3 \times 5$; $7 \times 9 - 7 \times 3$; $12 \times 7 - 4 \times 7$;
   $5 \times 8 + 5 \times 10$; $7 \times 9 - 5 \times 9$; $3 \times 8 + 3 \times 5$;
   $120a + 15a$; $12a + 12b$; $5m - 5n$;
   $7a + 7b$; $9a + 9b - 9c$; $2a + 3a + 12a$;
   $15b - 9b + 7b$; $17a + 17b - 17c$; $30a - 12a + 15a$.
   $5a + 7a + 8a + 9b + 3b + 6b + c + 4c + 5c$;
   $12a - 5a + 4a + 8b - 3b + 7b + 9c - 5c + 3c$;
   $4p + 3q + 2r + 5p + 7q + 9r + 2q + 5r + 3p$;
   $8x + 3y + 5z + 10y - 4x - 2z + 7x - 6y + 4z$;
   $5(a + b) + 3(a + b)$; $9(a - b) + 7(a - b)$;
   $12(a + b) - 5(a + b)$; $20(a - b) + 13(a - b)$.
2. Een jongen moest een getal vermenigvuldigen met 38. Bij vergissing vermenigvuldigde hij met 83. Wat was zijn produkt te groot?
3. Een tweede, die dezelfde vermenigvuldiging te maken had, schreef de gedeeltelijke produkten recht onder elkaar. Wat was zijn produkt te klein?
4. Als het verschil tusschen teller en noemer eener breuk 12 is, hoeveel zal dan het verschil tusschen teller en noemer zijn, wanneer deze ieder met 7 vermenigvuldigd worden?
5. Het verschil tusschen teller en noemer eener breuk is 9, wat moet men doen om dit verschil 36 te doen worden zonder de waarde der breuk te veranderen?
6. Van een verkleinbare echte breuk is het verschil tusschen teller en noemer 18. Vereenvoudigt men de breuk, dan krijgt ze de waarde $\frac{5}{8}$. Welke is die verkleinbare breuk?
7. Van een breuk is het verschil tusschen noemer en teller 20. Vermeerdert men teller en noemer ieder met 9, dan wordt de waarde $\frac{1}{2}$. Welke is die breuk?
8. Van een andere echte breuk is de som van teller en noemer 22. Telt men bij den teller 3 op, en trekt men van den noemer 3 af, dan krijgt de breuk de waarde $\frac{1}{4}$. Welke is die breuk?
9. Iemand koopt 20 HL tarwe à 12 gld. den HL en verkoopt ze à 15,375 gld. den HL, maar geeft op iederen HL 25 dL toe. Hoe groot is zijn winst?
10. A heeft 75 gld. meer dan B. Geeft A het $\frac{2}{3}$ van zijn geld aan B, dan heeft deze 85 gld. meer dan A. Hoeveel geld heeft ieder?

Digitized by Google

11. De inkoop van een partij thee bedraagt 1,20 gld. per halve kilo. Als de som van in- en verkoop 1080 gld. bedraagt en er 25 % gewonnen is, hoe groot is dan die partij geweest?
12. Het verschil van twee getallen verandert niet, als men bij het aftrektal 26 optelt en den aftrekker met 3 vermenigvuldigt. Zoo de som van aftrektal, aftrekker en verschil 56 is, welke is dan die aftrekking?
13. A kan een werk alleen in $12\frac{1}{2}$ dag afmaken en B zou het alleen in 10 dagen kunnen doen. Als A eerst alleen 5 dagen werkt en dan door B geholpen wordt, in hoeveel dagen zal het werk dan af zijn, en welk deel is dan door A verricht?
14. Een winkelier ontving 250 KG rijst. Bij verkoop in het klein kon hij maar 240 KG afwegen. Hij heeft 10 KG ingewogen op.... KG en 10 KG overwicht gegeven op.... KG. Hoeveel % heeft hij ingewogen, en hoeveel % overwicht gegeven?
15. Als een winkelier op 400 KG 5 % inweegt, hoeveel percent overwicht geeft hij dan?
16. Een kaashandelaar stelde den verkoopprijs der kaas 25 % hooger dan de inkoopprijs en won toch maar 20 %. Hoeveel percent was de kaas ingedroogd?
17. Iemand koopt 15 HL erwten à 8 gld. den HL en verkoopt ze à 11 ct. per liter. Zoo hij slechts 34 gld. wint, hoeveel liter heeft hij dan ingemeten en hoeveel % overmaat gegeven?
18. Een stuk laken is zooveel gekrompen, dat de meter van 5 gld. nu 5,20 gld. kost. Welk deel is ingekrompen?
19. Als 1 KG ongerookt vleesch 110 ct. kost en door het rooken 12 % in gewicht verloren gaat, hoe duur is dan 1 KG gerookt vleesch?
20. Een handelaar verliest op een partij 10 %, omdat men hem het vierde deel niet betaalt. Hoeveel percent zou hij gewonnen hebben, als hij alles betaald gekregen had?

Gedurige produkten.

27. Bepaling. *Als van meer dan twee getallen, b.v.* 7, 5, 8, 3, *het eerste vermenigvuldigd moet worden met het tweede, deze uitkomst met het derde, die uitkomst weer met het vierde, dan spreekt men van* **gedurig produkt.**

Digitized by Google

Dit gedurig produkt schrijft men: $3 \times 8 \times 5 \times 7$.

Het eerste getal rechts is **het vermenigvuldigtal** en heet **de eerste factor.**

In plaats van *gedurig produkt* zegt men vaak kortweg *produkt.*

28. Eigenschap I. In een produkt van drie factoren mag men den tweeden en derden factor verwisselen.

$$3 \times 4 \times 5 = 4 \times 3 \times 5.$$

Bewijs.

Om $3 \times 4 \times 5$ te bepalen, moeten we eerst de som nemen van **vier** getallen elk gelijk aan **vijf,** en die som dan **driemaal** nemen.

Dit kunnen wij aldus voorstellen:

5 5 5 5
5 5 5 5
5 5 5 5

Deze hoeveelheid splitsen wij in **vier** kolommen elk van 3×5. Zij is dus ook gelijk aan:

$$4 \times 3 \times 5.$$

Toepassing. $4 \times 7 \times 25 = 7 \times 4 \times 25 = 7 \times 100 = 700.$

29. Eigenschap II. In een gedurig produkt mag men elke twee naast elkaar staande factoren verwisselen.

$$7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 7 \times 4 \times 3 \times 5 \times 6.$$

Bewijs.

Om $7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ te bepalen moet men eerst 6 met 5 vermenigvuldigen, welke uitkomst men kan voorstellen door (5×6). Men kan dus voor $7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ schrijven $7 \times 3 \times 4 \times (5 \times 6)$.

Voor men met 7 vermenigvuldigt, moet eerst $3 \times 4 \times (5 \times 6)$ bepaald worden, en hiervan zijn **4** en **3** de tweede en derde factor, die men mag verwisselen, zoodat men voor $7 \times 3 \times 4 \times (5 \times 6)$ ook mag schrijven $7 \times 4 \times 3 \times (5 \times 6)$, of wat hetzelfde is: $7 \times 4 \times 3 \times 5 \times 6$.

Om van het bewijs een goed overzicht te hebben geven wij het volgende:

$7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 7 \times 3 \times 4 \times (5 \times 6)$ . . . . . Bepaling.
$= 7 \times 4 \times 3 \times (5 \times 6)$ . . . . . Eig. I.
$= 7 \times 4 \times 3 \times 5 \times 6$ . . . . . Bepaling.

30. Eigenschap III. In een gedurig produkt mag men de factoren in willekeurige volgorde schrijven.

Digitized by Google

$$7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 4 \times 6 \times 5 \times 3 \times 7.$$

Bewijs.

Wij zorgen eerst, dat uit $7 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ de factor 7 vooraan komt. Daartoe verwisselen wij 7 eerst met 3, dan met 4, daarna met 5 en eindelijk met 6. (Eig. II):

$$\mathbf{7} \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 3 \times \mathbf{7} \times 4 \times 5 \times 6 = 3 \times 4 \times \mathbf{7} \times 5 \times 6 =$$
$$= 3 \times 4 \times 5 \times \mathbf{7} \times 6 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \mathbf{7}.$$

Vervolgens zorgen wij, dat 3 de tweede factor wordt, en verwisselen daartoe 3 achtereenvolgens met 4, 5 en 6:

$$\mathbf{3} \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 4 \times \mathbf{3} \times 5 \times 6 \times 7 = 4 \times 5 \times \mathbf{3} \times 6 \times 7 =$$
$$= 4 \times 5 \times 6 \times \mathbf{3} \times 7.$$

Zorgen wij nu nog, dat 5 de derde factor wordt, door 5 met 6 te verwisselen, dan verkrijgen wij:

$$4 \times 6 \times 5 \times 3 \times 7.$$

31. Eigenschap IV. Een gedurig produkt verandert niet, als men eenige factoren vervangt door hun produkt.

$$7 \times 3 \times 5 \times 11 \times 8 = (7 \times 5 \times 8) \times 3 \times 11.$$

Bewijs.

Daar wij de factoren 7, 5 en 8 door hun produkt wenschen te vervangen, veranderen wij de volgorde der factoren zoodanig, dat 8 de eerste, 5 de tweede en 7 de derde factor is. (Eig. III).

$$7 \times 3 \times 5 \times 11 \times 8 = 3 \times 11 \times 7 \times 5 \times 8.$$

Volgens de beteekenis van gedurig produkt moet eerst $7 \times 5 \times 8$ berekend zijn, voor men met 11 mag vermenigvuldigen.

In plaats van $3 \times 11 \times 7 \times 5 \times 8$
mag men dus schrijven $3 \times 11 \times (7 \times 5 \times 8)$,
en hiervoor weer $(7 \times 5 \times 8) \times 3 \times 11$. (Eig. III).

Toepassing. $7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 10 \times 5 = (7 \times 3) \times (4 \times 5 \times 5) \times 10$
$= 21 \times 100 \times 10$
$= 21 \times 1000.$

32. Eigenschap V. Een produkt wordt vermenigvuldigd met een getal, door een der factoren van dat produkt met dat getal te vermenigvuldigen en de andere onveranderd te laten.

$$3 \times (7 \times 5 \times 8 \times 11) = 7 \times (3 \times 5) \times 8 \times 11.$$

Bewijs.

De beteekenis van $3 \times (7 \times 5 \times 8 \times 11)$
is dezelfde als van: $3 \times 7 \times 5 \times 8 \times 11$ . . . . . Bepaling.
en dit is gelijk aan $7 \times (3 \times 5) \times 8 \times 11$. . . . . Eig. IV.

Digitized by Google

Toepassing. $25 \times 28 = 25 \times (4 \times 7) = (25 \times 4) \times 7 = 100 \times 7$;
$35 \times 18 = 35 \times (2 \times 9) = (35 \times 2) \times 9 = 70 \times 9$.

33. Eigenschap VI. Een getal wordt met een produkt vermenigvuldigd, als men het eerst met den eersten factor vermenigvuldigt, die uitkomst met den volgenden enz., tot men alle factoren van het produkt gebruikt heeft.

$$(7 \times 3 \times 9 \times 6) \times 5 = 7 \times 3 \times 9 \times 6 \times 5.$$

Bewijs.

$(7 \times 3 \times 9 \times 6) \times 5$ moet men beschouwen als een produkt van twee factoren. Verwisselt men deze factoren, dan verkrijgt men:

$$5 \times (7 \times 3 \times 9 \times 6)$$

of wat hetzelfde is: $5 \times 7 \times 3 \times 9 \times 6$,

waarvoor men ook mag schrijven:

$$7 \times 3 \times 9 \times 6 \times 5.$$

Toepassing. $35 \times 18 = (7 \times 5) \times 18 = 7 \times (5 \times 18) = 7 \times 90$;
$28 \times 25 = (7 \times 4) \times 25 = 7 \times (4 \times 25) = 7 \times 100$.

34. De vorige eigenschappen kunnen als volgt door letters worden voorgesteld:

$$abc = bac$$
$$abcde = acbde$$
$$abcdef = ceafbd$$
$$abcde = (ace)bd$$
$$a(bcde) = (ab)cde$$
$$(abcde)f = abcdef.$$

Opgaven.

1. Welke eigenschappen zijn bij de volgende herleidingen gebruikt:
   $3 \times 4 \times 7 \times 5 = 21 \times 20$; $16 \times 25 = 4 \times 100$;
   $5 \times (a+b-c) = 5a+5b-5c$; $7(x-y+z) = 7x-7y+7z$;
   $a(b+c-d) = ab+ac-ad$; $(a+b-c)\,d = ad+bd-cd$;
   $3abc + 5\,abc = 8abc$; $9ab - 5ab = 4ab$;
   $5 \times 3abc = 15abc$; $2a \times 3b = (2a \,.\, 3)\,b = 6ab$?
2. Herleid:
   $5a \times 3b$; $7a \times 2b$; $5ab \times 3c$; $9a \times 20bcd$; $4ab \times 3c$;
   $5ab \times 2cd$; $7ab \times 5cd$.

Digitized by Google

3. Herleid:
$13abc + 5abc - 4abc + 9abc - 6abc$;
$20abc - 8abc - 3abc + 5abc + 7abc$;
$4pqr + 5mno - 3pqr + 15mno$.

4. Is $am + an = a(m + n)$? Zoo ja, waarom?
„ $am - an = a(m - n)$? „ „ „
Schrijf als een produkt:
$ax + ay + az$; $ax + ay - az$; $ax - ay + az$;
$axy + axz - ayz$; $axy - axz - ayz$;
$5ax + 10ay + 15az$; $18mx - 24my + 6mx$;
$3(a + b) + 5(a + b)$; $a(a + b) + 7(a + b)$;
$9(a - b) - 4(a - b)$; $x(a - b) - y(a - b)$.

5. Een leerling, die een produkt van twee factoren met 7 moest vermenigvuldigen, vermenigvuldigde elken factor met 7. Hoeveel maal het produkt verkreeg hij?

6. Wat gebeurt er met een produkt van twee factoren, als men den eersten met 3 en den tweeden factor met 5 vermenigvuldigt?

7. Van een kapitaal groot 12000 gld. staat een gedeelte uit à 3 % en het andere deel à $4\frac{1}{2}$ %. Zoo het kapitaal per jaar 480 gld. opbrengt, welk deel staat dan tegen 3 % uit?

8. Van 2400 gld. staat een gedeelte uit à $3\frac{1}{2}$ % en het andere deel à $4\frac{1}{4}$ %. Als het kapitaal gemiddeld 4 % opbrengt, hoeveel is dan tegen $3\frac{1}{2}$ % uitgezet?

9. Als A om 8 uur 's morgens een werk begint, om 12 uur een uur schaft, dan is hij om half drie 's middags er mee klaar. Begint B kwart voor tien 's morgens, en werkt hij door tot half een, dan is B ook klaar. Om hoe laat moeten zij samen beginnen, om precies om 12 uur het werk af te hebben?

10. Tel ik bij den vermenigvuldiger 12 op, dan wordt het produkt 3744 meer, dan wanneer ik er 4 aftrek. Welk is het vermenigvuldigtal?

11. Van een vermenigvuldiging is de som van vermenigvuldigtal, vermenigvuldiger en produkt gelijk aan 447. Als de vermenigvuldiger 15 is, wat is dan het vermenigvuldigtal?

12. Van een rechthoek is de omtrek $5\frac{1}{3}$ maal de breedte. Als het verschil tusschen lengte en breedte 6 meter bedraagt, hoeveel bedraagt dan de oppervlakte?

13. Een werk, dat voor 96 gld. werd aangenomen, zou A in 20 en B in 24 dagen kunnen verrichten. Als A eerst 9 dagen alleen

Digitized by Google

werkt en dan de rest met B afmaakt, hoeveel komt dan A toe van de aannemingssom?

4. Van een kapitaal staat het vierde deel uit à 5 % en de rest à 4 %. Hoeveel percent brengt dit kapitaal gemiddeld op?
15. Op een partij goed wordt 10 % van den verkoop gewonnen. Hoeveel is de inkoop geweest, als de som van verkoop, inkoop en winst 2400 gld. bedraagt?
16. Veertig liter wijn van 80 ct. worden vermengd met wijn van 70 ct. per liter, waardoor men wijn van 72 ct. per liter verkrijgt.
   a. Met welk bedrag is de waarde van den besten wijn door de menging verminderd?
   b. Met welk bedrag moet dan de waarde van den minderen wijn toenemen om geen verlies te lijden?
   c. Met welk bedrag neemt de waarde van den minderen wijn per liter toe?
   d. Hoeveel liter minderen wijn moet er dus bij het mengsel zijn?
17. Iemand vermengt 100 KG tabak van 96 ct. met een andere soort van 70 ct. en verkrijgt daardoor tabak van 80 ct. per KG. Hoeveel KG van de tweede soort heeft hij genomen?
18. Een handelaar vermengt 80 KG thee van 1,60 gld. met 60 KG van 2,16 gld. per KG. Wat is nu de waarde van 1 KG van het mengsel, en hoeveel KG van 80 ct. moet hij bij dit mengsel doen, om een andere soort te verkrijgen, die 1,20 gld. per KG waard is?
19. Iemand kocht een rechthoekig stuk land, lang 2 HM 3 DM en 5 M., breed 1 HM, 5 DM en 4 M. tegen 48 gld. de Are. Hij verkocht het voor bouwterrein tegen 0,80 gld. per M^2. Als hij 3072 gld. onkosten heeft gemaakt, hoeveel bedraagt dan nog zijn winst?
20. Om een tafel lang 16 dM en breed 1,2 M wordt een rand gemaakt van fineer, die $1\frac{1}{2}$ dM breed is. Hoeveel vierkante kwartdecimeter is die rand groot?

Machten.

35. Bepalingen. *Een* **macht** *is het produkt of gedurig produkt van eenige gelijke factoren.*

Zoo is $3 \times 3 \times 3 \times 3$ de **vierde macht** van 3; men schrijft dit korter 3^4 (lees 3 tot de 4de macht).

Digitized by Google

Evenzoo is 7×7 de **tweede macht** van 7, waarvoor men schrijft 7^2.

Het cijfertje rechts, dat aanwijst uit hoeveel gelijke factoren een macht bestaat, heet de **exponent** *der macht.*

Elk der gelijke factoren, waaruit de macht bestaat heet het **grondtal** *of de* **basis** *der macht.*

Het getal 7 is geen produkt van gelijke factoren, dus ook geen macht. Toch noemt men 7 **de eerste macht** van 7.

36. Eigenschap I. Een produkt wordt tot een macht gebracht door elk der factoren tot die macht te verheffen.

$$(3 . 5 . 7)^4 = 3^4 . 5^4 . 7^4.$$

Bewijs.

$(3 . 5 . 7)^4$ beteekent: $(3 . 5 . 7) \times (3 . 5 . 7) \times (3 . 5 . 7) \times (3 . 5 . 7)$, en dit is gelijk aan: $3 . 5 . 7 . 3 . 5 . 7 . 3 . 5 . 7 . 3 . 5 . 7$.

In dit gedurig produkt mag men de factoren 3 vervangen door hun produkt, evenzoo de factoren 5 en de factoren 7. Men verkrijgt dan:

$$(3 . 3 . 3 . 3) \times (5 . 5 . 5 . 5) \times (7 . 7 . 7 . 7) \text{ of } 3^4 . 5^4 . 7^4.$$

37. Eigenschap II. Het produkt van twee machten van een zelfde getal is weer een macht van dat getal, die tot exponent heeft de som der exponenten.

$$3^5 \times 3^4 = 3^9.$$

Bewijs.

$3^5 \times 3^4$ beteekent: $(3 . 3 . 3 . 3 . 3) \times (3 . 3 . 3 . 3)$, en dit is gelijk aan: $3 . 3 . 3 . 3 . 3 \times 3 . 3 . 3 . 3$ of 3^9.

38. Eigenschap III. Als een macht van een getal weer tot een macht verheven moet worden, verkrijgt men een nieuwe macht van dat getal, die tot exponent heeft het produkt der exponenten.

$$(3^5)^4 = 3^{20}.$$

Bewijs.

$(3^5)^4$ beteekent $3^5 \times 3^5 \times 3^5 \times 3^5$ en dit is volgens Eig. II gelijk aan $3^{5+5+5+5} = 3^{20}$.

39. Men kan ook deze eigenschappen aldus door letters voorstellen:

$$(abc)^3 = a^3 b^3 c^3,$$
$$a^3 \times a^6 = a^9,$$
$$(a^5)^6 = a^{30}.$$

Digitized by Google

Opgaven.

1. Welke eigenschappen zijn bij de volgende herleidingen gebruikt:
$30^3 = (2 . 3 . 5)^3 = 2^3 . 3^3 . 5^3$;
$90^4 = (2 . 3^2 . 5)^4 = 2^4 . (3^2)^4 . 5^4 = 2^4 . 3^8 . 5^4$?
2. Schrijf in de eenvoudigste factoren:
20^3; 36^4; 12^5; 60^2; 72^4; 54^3; 48^4.
3. Welke eigenschappen zijn bij de volgende herleiding gebruikt?
$12^5 \times 18^3 = (2^2 . 3)^5 \times (2 . 3^2)^3 = (2^2)^5 . 3^5 \times 2^3 . (3^2)^3 =$
$= 2^{10} \times 3^5 \times 2^3 . 3^6 = 2^{13} . 3^{11}$.
4. Schrijf eveneens in de eenvoudigste factoren:
$24^2 \times 18^3$; $20^4 \times 50^3$; $60^3 \times 90^4$; $72^2 \times 96^3$.
5. Herleid: $a^5 \times a^4$; $a^{10} \times a^8$; $a^7 \times a^3$; $a^5 \times a^4$; $a^{10} \times a^{11}$;
$x^2y^3 \times x^3y^4$; $x^5y^3 \times x^2y^4$; $x^3y^5 \times x^4y^7$; $x^3y^2 \times x^2y^5$.
6. Ook: $(a^3)^4$; $(a^5)^2$; $(a^4)^5$; $(a^3)^3$; $(a^5)^6$; $(a^2b^3)^2$; $(a^4b^2c^3)^3$;
$(a^2b^3c^4)^5$; $(a^5b^3c)^4$; $(a^2b^2c^3)^6$.
7. Herleid ook nog:
$(a^4b^2)^3 \times (a^3b^4)^2$; $(a^2b^5)^3 \times (a^3b^5)^2$; $(a^3b^4c^2)^4 \times (a^2b^3c^5)^3$;
$(a^2bc^4)^3 \times (ab^3c^2)^5$.
8. Twee kapitalen verschillen 3000 gld. Het grootste staat uit à $3\frac{1}{2}$ %, het kleinste à 4 %, terwijl de gezamenlijke rente 405 gld. 's jaars bedraagt. Hoe groot is ieder kapitaal?
9. A heeft twee kapitalen; het eerste is 2000 gld. grooter dan het tweede en brengt 4 % op, terwijl het tweede 5 % opbrengt. Hoeveel gulden zou A meer aan rente krijgen, wanneer het grootste à 5 % en het kleinste à 4 % uitstond?
10. Twee kapitalen zijn verschillend. Het grootste staat uit à 4 %, het kleinste à 5 %. Verwisselt men de percenten, dan krijgt men 24 gld. meer rente. Hoeveel verschillen die kapitalen?
11. Twee kapitalen zijn samen 6000 gld. groot. Het grootste staat uit à 4 %, het kleinste à $4\frac{3}{4}$ %. Verwisselt men de percenten dan zouden de kapitalen 9 gld. meer opbrengen, hoe groot is ieder kapitaal?
12. Iemand verkoopt 40 HL bier en wint $2\frac{1}{2}$ maal zooveel, als de inkoop van 2 HL bedraagt.
Vul nu eens in:
Verkoop van 40 HL = inkoop van 40 HL + inkoop van ... HL.
Winst op 40 HL = Inkoop van .... HL.
Winst = ... gedeelte van den inkoop.

Digitized by Google

13. Als iemand op 80 M laken den verkoop van 5 M wint, dan is:
Verkoop van 80 meter = inkoop van 80 meter + ...
Verkoop van .... meter = inkoop van 80 meter
Verkoop van 1 meter = inkoop van .... meter.
Vul dit in, alsmede het volgende:
De verkoop is dus .... maal zoo groot als de inkoop, derhalve is de winst .... gedeelte van den inkoop of .... %.

14. Een graanhandelaar verkoopt 40 HL rogge en wint $2\frac{1}{2}$ maal zooveel als de verkoop van 2 HL bedraagt. Hoeveel % wint hij?

15. P verkoopt zijn waren voor 406 gld. en wint nu 16 %. Voor hoeveel had hij ze moeten verkoopen, om 20 % te winnen?

16. Iemand heeft goed verkocht en daarop $12\frac{1}{2}$ % gewonnen. Hoeveel maal zoo hoog had hij zijn verkoop moeten stellen, om 25 % te winnen?

17. 40 L wijn wordt vermengd met 50 L van een soort die 15 ct. per liter goedkooper is, terwijl het mengsel 60 gld. waard is.
Hoeveel zou het mengsel waard zijn, als de tweede soort even duur was geweest als de eerste?
Hoeveel was dan de prijs van de eerste soort?

18. 25 KG koffie wordt vermengd met 40 KG van een tweede soort, die per KG 20 ct. goedkooper is. Als het geheele mengsel 44 gld. waard is, bereken dan den prijs van iedere soort.

19. Een winkelier mengt 60 KG thee met 40 KG van een soort, die per KG 40 cent goedkooper is, waardoor hij een mengsel verkrijgt, dat per KG 184 ct. waard is. Hoeveel is de waarde van een KG van elke soort?

20. Een wijnhandelaar vermengt twee soorten wijn. Van de eerste soort neemt hij 6 HL, van de tweede 2 HL. De verkregen wijn kan hij nu met 20 % winst voor 720 gld. verkoopen. Als de inkoopswaarde van de tweede soort 20 ct. per liter lager is dan van de eerste soort, bereken dan den inkoop per HL van iedere soort?

Deeling.

40. Vraagstuk I. *Vijf jongens moeten* 45 *noten gelijk verdeelen; hoeveel noten krijgt ieder?*

Digitized by Google

Oplossing.

Omdat 45 noten gelijk is aan 5×9 noten, kan ieder jongen ook 9 noten krijgen.

Men zegt gewoonlijk: *ieder jongen krijgt het* 5de *deel van* 45 *noten*, en dat is 9 noten.

Vraagstuk II. *Hoeveel jongens kunnen van* 48 *noten ieder* 8 *noten krijgen?*

Oplossing.

Omdat 48 noten gelijk is aan 6×8 noten, kan men ook aan 6 jongens ieder 8 noten geven.

Men zegt gewoonlijk: *Er kunnen zooveel jongens aan die verdeeling deelnemen, als men* 8 *noten van* 48 *noten kan afnemen, of als* 8 *noten in* 48 *noten begrepen zijn.*

In vraagstuk I leert men een getal zoeken dat, met 5 vermenigvuldigd, 45 noten oplevert.

In vraagstuk II leert men een getal zoeken, waarmee men 8 noten moet vermenigvuldigen om 48 noten te verkrijgen.

De bewerking, in vraagstuk I verricht, heet **verdeelingsdeeling**; die van vraagstuk II heet **verhoudingsdeeling**. Beide bewerkingen vat men samen onder den naam **deeling.**

41. Bepalingen. De deeling van twee getallen *is een bewerking, die ons een getal leert vinden, dat, met het eene* (**deeler**) *vermenigvuldigd, het andere* (**deeltal**) *tot produkt geeft.* (**Verdeelingsdeeling.**)

Of wel:

De deeling van twee getallen *is een bewerking, die ons een getal leert vinden, waarmee het eene* (**deeler**) *vermenigvuldigd moet worden, om het andere* (**deeltal**) *tot produkt te verkrijgen.* (**Verhoudingsdeeling.**)

In elk geval heet het te zoeken getal **het quotient.**

Bij een verdeelingsdeeling is dus:

Deeltal = deeler $\times$ quotient.

Bij een verhoudingsdeeling daarentegen:

Deeltal = quotient $\times$ deeler.

42. Vraagstuk III. *Als een dozijn potlooden* 72 *cent kost, hoeveel kost dan* 1 *potlood?*

Digitized by Google

Oplossing.

Een dozijn of 12 potlooden kosten 72 ct., dus kost één potlood het 12de deel van 72 ct., d. i. 6 ct., omdat 12×6 ct. $= 72$ ct. is.

De oplossing van dit vraagstukje is geschied door een verdeelingsdeeling. Men kan het echter ook met behulp van een verhoudingsdeeling oplossen:

Zoo vaak men voor één potlood 1 cent betaalt, zoo vaak betaalt men voor een dozijn 12 ct.

Het aantal centen, dat men voor één potlood moet betalen, kan men dus verkrijgen door te zien, hoe vaak men 12 cent voor het dozijn betaald heeft, m. a. w. hoe vaak 12 ct. in 72 ct. begrepen zijn. (Verhoudingsdeeling.) Dat aantal malen bedraagt 6; dus betaalt men ook voor 1 potlood 6 keer 1 ct. of 6 ct.

Men ziet hieruit, dat de getallenwaarde van een quotient dezelfde is, of men de deeling als verdeelings-, dan als verhoudingsdeeling opvat.

Wij noemen daarom in het vervolg het quotient van twee getallen *een derde getal, dat, met den deeler vermenigvuldigd, het deeltal tot produkt geeft.*

Het quotient van twee getallen a en b stelt men voor door $a : b$. Noemt men het quotient c, dan moet dus:

$$b \times c = a \text{ zijn.}$$

43. Vraagstuk IV. *Zeven jongens moeten* 60 *knikkers verdeelen, en alle jongens moeten evenveel knikkers krijgen. Hoeveel krijgt ieder?*

Oplossing.

60 knikkers is meer dan 7×8 knikkers en minder dan 7×9 knikkers. Ieder jongen kan dus wel 8 knikkers krijgen, maar niet 9. Geeft men ieder jongen 8 knikkers, dan blijven er van de 60 knikkers nog 4 knikkers over.

Men schrijft dit aldus:

60 knikkers : 7 = 8 knikkers
56 „
4 knikkers over,

en zegt dan, dat 4 knikkers de **rest** der deeling is.

In de vraagstukken I, II en III kon de deeling volkomen verricht worden.

45 noten : 5 = 9 noten.
45 „
0 noten over.

48 centen : 8 centen = 6
48 „
0 centen over.

Digitized by Google

In deze gevallen spreekt men van **een rest nul.**

Wanneer de deeling van twee getallen een rest nul oplevert, noemt men deze een **opgaande deeling.** Is de rest niet nul, dan spreekt men van een **niet-opgaande deeling.**

Bij een opgaande deeling is:

$$\textbf{Deeltal} = \textbf{deeler} \times \textbf{quotient.}$$

Bij een niet-opgaande deeling is:

$$\textbf{Deeltal} = \textbf{deeler} \times \textbf{quotient} + \textbf{rest.}$$

Noemt men het deeltal a, de deeler b en heeft men met een opgaande deeling te doen, dan is:

$$(a : b) \times b = a.$$

Waarom?

Daar wij bij de vermenigvuldiging aan $0 \times$ zeker getal de waarde nul toekenden, moeten wij ook nu zeggen:

0 : een getal is nul.

Immers $0 : 5 = 0$, omdat $0 \times 5 = 0$ is,

$0 : 73 = 0$, omdat $0 \times 73 = 0$ is.

Bij de eigenschappen der deeling, die wij in de volgende paragrafen zullen behandelen, worden opgaande deelingen ondersteld, indien niet het tegendeel gezegd wordt.

44. Eigenschap I. Het quotient van twee getallen wordt met een derde getal vermenigvuldigd, als men het deeltal met dat getal vermenigvuldigt.

Te bewijzen: Als $a : b = p$ is, dan is $5a : b = 5p$.

Bewijs.

Is p het quotient van $a : b$, dan is volgens § 41 het deeltal $a = p \times b$, dus is $5a = 5p \times b$, (welke eigenschap?); derhalve is $5p$ het quotient van $5a : b$.

Opmerking. Is $5a : b$ vijfmaal zoo groot als $a : b$, dan is ook dit laatste quotient vijfmaal zoo klein als het eerste. Wij leeren dus hieruit:

45. Eigenschap II. Het quotient van twee getallen wordt door een derde getal gedeeld, als men het deeltal door dat getal deelt.

46. Eigenschap III. Het quotient van twee getallen wordt met een getal vermenigvuldigd, als men den deeler door dat getal deelt.

Te bewijzen: Als $a : 5b = q$ is, dan is $a : b = 5q$.

Digitized by Google

Bewijs.

Is $a : 5b = q$, dan is $a = q \times 5b$
of $a = 5q \times b$ (welke eigenschap?);
derhalve ook $a : b = 5q$.

47. Omgekeerd volgt er ook uit, dat $a : 5b$ vijfmaal zoo klein is als $a : b$; m. a. w.:

Eigenschap IV. Het quotient van twee getallen wordt door een derde getal gedeeld, als men den deeler met dat getal vermenigvuldigt.

48. Uit I en IV volgt:

Eigenschap V. Het quotient van twee getallen verandert niet, als men deeler en deeltal met een zelfde getal vermenigvuldigt.

49. En uit II en III volgt.

Eigenschap VI. Het quotient van twee getallen verandert niet, als men deeler en deeltal door een zelfde getal deelt.

Opgaven.

1. Volgens welke eigenschap is:
   $1260 : 42 = 210 : 7$; $135 : 15 = 270 : 30 = 27 : 3$?
2. Wat gebeurt er met het quotient eener deeling, wanneer men het deeltal met vijfmaal den deeler vermeerdert of vermindert?
3. Waaraan is het produkt van deeltal, deeler en quotient eener opgaande deeling gelijk?
4. Als men van een deeling den deeler door 5 deelt, dan wordt het quotient 72 grooter. Wat is het ware quotient?
5. Als men van een deeling het deeltal met 3 vermenigvuldigt, dan wordt het quotient 36 grooter. Welke is die deeling, als de deeler vijfmaal zoo groot is als het quotient?
6. Als men bij een niet-opgaande deeling deeler en deeltal met een zelfde getal vermenigvuldigt, dan verandert het quotient niet, doch de rest wordt ook met dat getal vermenigvuldigd. Verklaar dit.

   Gegeven. $a : b = c$ en de rest r, dus:
   $a = bc + r$.

   Te bewijzen. $5a : 5b = c$ en de rest $5r$.

Digitized by Google

7. A verdient in 8 weken 8 gld. meer dan B in 10 weken, terwijl B per week 3 gld. minder verdient dan A. Hoeveel zou A minder verdiend hebben dan B, zoo deze evenveel weekloon als A ontving? En hoeveel zou A minder verdiend hebben dan B, als het weekloon van A even hoog was als dat van B? Bereken nu eens, hoeveel weekloon ieder ontving.
8. In een winkel koopt A 6 M. laken en B voor evenveel geld 7,5 M. Zoo het laken van A 1,20 gld. meer per M. kost, dan dat van B, vraagt men naar den prijs per M. van elke soort.
9. Een winkelier koopt twee stukken laken, het eerste is lang 60 M. en het andere 25 M. Als 4 M. van het eerste stuk even duur zijn als 5 M. van het tweede en hij in het geheel 460 gld. betaalt, wat is dan de prijs per M. van ieder stuk?
10. Een koopman denkt een partij waren te verkoopen voor 4200 gld. en dan 5 % te winnen. Hij is echter genoodzaakt ze voor 3660 te verkoopen. Hoeveel % verliest hij?
11. Een handelaar verkoopt een partij goed voor zooveel boven de 1000 gld., als de inkoop er beneden is, en wint dan 50 %. Hoe hoog is de inkoop?
12. Een stuk laken van 60 M. kost evenveel als 8 stukken katoen elk van 75 M. Hoeveel betaalt men voor 1 stuk katoen, als 1 meter katoen 4,32 gld. minder kost dan 1 meter laken?
13. Iemand heeft waren verkocht en daarop 20 % verloren. Hoeveel maal den verkoopprijs had hij moeten ontvangen om 20 % te winnen?
14. Iemand verkoopt eenige HL tarwe met 10 % verlies. Had hij 270 gld. meer ontvangen, dan zou hij 20 % gewonnen hebben. Hoeveel is de inkoopswaarde?
15. Een werk kan door A in 15 dagen afgemaakt worden. Werken A en B samen, dan is het werk in 10 dagen klaar; en werken A, B en C samen, dan is het in 6 dagen af. In hoeveel dagen kunnen B en C het samen afmaken?
16. Iemand verkoopt een partij laken met 20 % winst, doch krijgt van den verkoop $7\frac{1}{2}$ % niet betaald. Hoeveel % bedraagt nu de winst?
17. A zet een kapitaal gedurende 8 maanden op interest en ontvangt na afloop van dien termijn 1694 gld. terug. Had hij het kapitaal 3 maanden langer laten uitstaan, dan zou hij 1710,5 gld. terug gekregen hebben. Hoeveel brengt dat kapitaal per maand op? Hoe groot is het, en tegen welk percent stond het uit?

Digitized by Google

18. A heeft een kapitaal uitgeleend gedurende 5 maanden; B een kapitaal, dat 300 gld. grooter is tegen hetzelfde percent ook gedurende 5 maanden. Na afloop van dien termijn krijgt A 1220 gld. terug en B 1525 gld. Tegen welk percent waren die kapitalen uitgeleend, en hoe groot waren ze?
19. A leent een kapitaal tegen 6 % gedurende eenige maanden uit; B een kapitaal, dat 1000 gld. grooter is ook tegen 6 %, gedurende denzelfden tijd. A ontvangt 2080 gld. terug en B 3120 gld. Hoe lang hebben A en B hunne kapitalen uitgeleend, en hoe groot waren de kapitalen?
20. Een terrein lang 2375 M., breed 1700 M. wordt door drie wegen van 5 M. breedte in 6 gelijke deelen verdeeld. Hoeveel HA zullen de stukken in grootte verschillen, al naar men twee wegen in de lengte en een in de breedte aanlegt of omgekeerd?

---

50. Eigenschap VII. Een produkt of gedurig produkt wordt gedeeld door een getal, als men een der factoren van dat produkt door dat getal deelt.

Te bewijzen. $ab : c = (a : c) \times b$.

Bewijs.

$(a : c) \times b$ zal het quotient zijn, als het, met den deeler c vermenigvuldigd, het deeltal ab oplevert.

Nu wordt $(a : c) \times b$ met c vermenigvuldigd, als men een der factoren er mee vermenigvuldigt, en daarvoor kiezen wij $a : c$.

$$\{c \times (a : c)\} \times b = ab.$$

51. Eigenschap VIII. Een produkt wordt gedeeld door een produkt, als men een der factoren uit het eerste deelt door een der factoren uit het tweede; een tweeden factor uit het eerste weer deelt door een tweeden factor uit het tweede enz., en de komende quotienten met elkaar en met de overblijvende factoren van het deeltal vermenigvuldigt.

Te bewijzen. $abcd : pqr = (a : p)\,(b : q)\,c\,(d : r)$.

Bewijs.

De eigenschap zal waar zijn, als $(a : p)\,(b : q)\,c\,(d : r)$ met pqr vermenigvuldigd $abcd$ oplevert.

Nu is $pqr \times (a : p)\,(b : q)\,c\,(d : r) =$

$$= \{p \times (a : p)\} \times \{q \times (b : q)\} \times c \times \{d \times (d : r)\} = abcd.$$

Digitized by Google

52. Eigenschap IX. Een som wordt door een getal gedeeld, door elken term der som door dat getal te deelen, en de verkregen quotienten samen te tellen.

Te bewijzen. $(a+b):c=a:c+b:c.$

Bewijs.

$a:c+b:c$ zal het quotient zijn, als het, met den deeler c vermenigvuldigd, het deeltal oplevert.

$$c\times(a:c+b:c)=c\,(a:c)+c\,(b:c)=a+b.$$

53. Eigenschap X. Een verschil wordt door een getal gedeeld, door aftrektal en aftrekker er door te deelen, en het eerste quotient te verminderen met het tweede.

Te bewijzen. $(a-b):c=a:c-b:c.$

Bewijs.

$a:c-b:c$ zal het quotient zijn, als het, met den deeler c vermenigvuldigd, het deeltal $a-b$ oplevert.

$$c\,(a:c-b:c)=c\,(a:c)-c\,(b:c)=a-b.$$

54. Eigenschap XI. Het quotient van twee machten van een zelfde getal is weer een macht van dat getal, die tot exponent heeft het verschil der exponenten.

Te bewijzen: $a^{13}:a^5=a^8.$

Bewijs.

De eigenschap is waar, omdat $a^5\times a^8=a^{13}$ is.

Opgaven.

1. Waarop berusten de volgende herleidingen:

$$92:4=(80+12):4=80:4+12:4=20+3.$$
$$135:5=(100+35):5=100:5+35:5=20+7.$$
$$96:4=(100-4):4=100:4-4:4=25-1.$$
$$192:8=(200-8):8=200:8-8:8=25-1.$$
$$\frac{24\times17}{8}=3\times17;\quad\frac{35\times24}{7\times8}=5\times3;$$
$$\frac{26\times40}{65}=\frac{26\times40}{13\times5}=2\times8?$$

2. Vul in:

$12a:3=$	$15ab:3a=$	$20ab:4b=$
$a^5:a^3=$	$a^{15}:a^5=$	$a^9:a^4=$
$a^3b^5:ab^2=$	$a^3b^2c:ac=$	$a^5b^4:a^3b^2=$

Digitized by Google

3. Herleid:
   $15a^3b^4 : 5a^2b^3$; $24a^5b^4 : 3a^3b$;
   $30a^2b^5 : 6ab^3$; $15a^5b^6 : 5a^3b^4$;
   $84a^5b^3c^4 : 12a^3bc^2$; $48a^5b^4c^9 : 8ab^3c^5$.
4. Volgens welke eigenschap is 8 gld. even vaak op 192 gld. begrepen als 8 ct. op 192 ct.?
5. Waarom is het 80ste deel van 3280 hetzelfde als het 8ste deel van 328?
6. Het quotient van twee getallen verandert niet, als men het deeltal met 4 vermenigvuldigt en bij den deeler 36 optelt. Welke is die deeler?
7. Een quotient verandert niet, als men het deeltal door 5 deelt en van den deeler 24 afneemt. Welke is nu de deeler?
8. Wat gebeurt er met het quotient van twee getallen, als men den deeler met 8 en het deeltal met 24 vermenigvuldigt?
9. Het quotient van twee getallen is 12 en hun som is 195. Bepaal die getallen.
10. Van welke twee getallen is het verschil 506 en het quotient 12?
11. Iemand verkoopt een aantal schapen tegen 12 gld. het stuk. Als hij 60 schapen voor niet geeft, dan moet hij voor ieder der andere 48 gld. meer ontvangen om zijn schade te dekken. Hoeveel schapen laat hij zich betalen?
12. Een kapitaal staat uit à 4 %. Als 5000 gld. geen interest opbrachten, dan moest de rest tegen 6 % uitstaan om evenveel op te brengen als nu het geheele kapitaal. Hoe groot is dit?
13. Een kapitaal brengt gemiddeld $4\frac{1}{2}$ % op. Als 6000 gld. van dat kapitaal tegen $5\frac{1}{2}$ % en de rest tegen $4\frac{1}{4}$ % uitstaat, hoe groot is dan dat kapitaal?
14. Een partij goederen brengt 300 gld. meer op, wanneer men 20 % van den verkoop wint, dan wanneer men 20% van den inkoop wint. Hoe groot is de inkoop?
15. Van een opgaande deeling is de deeler gelijk aan de helft van het quotient, en het deeltal is 729 maal het quotient. Welke is die deeling?
16. Van een deeling is het quotient 5 en de rest 13. Maakt men het deeltal 7 maal zoo groot, dan wordt het quotient 40 en de rest 6. Hoe groot is de deeler en het deeltal?
17. Als A eerst 30 dagen en daarna B $12\frac{1}{2}$ dag aan zeker werk arbeidt, dan is het voltooid. Ook wordt dat werk afgemaakt,

Digitized by Google

als A alleen 24 dagen en daarna B 20 dagen werkt. In hoeveel dagen kan ieder alleen dat werk verrichten?

18. Als A 30 dagen werkt en daarbij 20 dagen door B geholpen wordt is het werk af. Ook is het werk af, als B 24 dagen werkt en daarbij door A 18 dagen geholpen wordt. In hoeveel dagen kunnen zij samen het werk afmaken?
19. A kan een werk in 24 dagen afmaken en B in 18 dagen. In hoeveel dagen kunnen zij het samen afmaken, als B per dag maar half zoo lang werkt als A?
20. Aan een reservoir zijn twee kranen gemerkt A en B. Staat A $5\frac{1}{2}$ uur en B 3 uur open, dan is het reservoir leeg; ook is het leeg, als A 4 uur en B 5 uur open staat. Zoo het reservoir 9,3 HL bevat, hoeveel liter lost dan elke kraan per uur?

Digitized by Google

TALSTELSELS.

---

55. De getallen, waarvan wij in de vorige bladzijden verschillende eigenschappen behandelden, zijn alle geschreven in het **tientallig stelsel.** Dat wil zeggen: 10 **eenheden** vormen een nieuwe eenheid, **tiental** genoemd; 10 tientallen vormen weer een nieuwe eenheid, **honderdtal** genoemd; 10 honderdtallen vormen een **duizendtal**, enz. In het algemeen: tien eenheden van zekere orde vormen een eenheid van een hoogere orde.

Daarom noemt men tien het **grondtal** van ons **talstelsel.**

Men zegt, dat een getal in het **achttallig stelsel** geschreven is, als acht eenheden een nieuwe eenheid vormen, die men **achttal** noemt. Acht achttallen vormen dan weer een nieuwe eenheid nl. een vierenzestigtal (korter geschreven 8^2-tal). Acht 8^2-tallen vormen weer een nieuwe eenheid en wel een 8^3-tal enz.

Even als in het tientallig stelsel de enkelvoudige eenheden de eerste plaats rechts, de tientallen de tweede plaats rechts, de honderdtallen de derde plaats rechts enz. innemen, zoo ook nemen in het achttallig stelsel de enkelvoudige eenheden de eerste plaats rechts, de achttallen de tweede plaats rechts, de 8^2-tallen de derde plaats rechts, de 8^3-tallen de vierde plaats rechts in, enz.

Als dus het getal 5372 in het achttallig stelsel geschreven is, dan bestaat dit getal uit 2 eenheden + 7 (8-tallen) + 3 (8^2-tallen) + 5 (8^3-tallen).

Opgaven.

1. Waaruit bestaan de volgende getallen:
   357 (9-tallig st.); 42735 (8-tallig st.);
   2476 (12-tallig st.); 5948 (11-tallig st.)?

Digitized by Google

2. Vul in:

14 (8-t.) = 1 (8-t.) + 4 eenh. = 12
35 (8-t.) = ... (8-t.) + ... eenh. =
48 (9-t.) = ... (9-t.) + ... eenh. =
53 (9-t.) = ... (9-t.) + ... eenh. =

3. Hoeveel eenheden bevatten de volgende getallen:
56 (7-tallig); 94 (12-tallig); 52 (6-tallig);
358 (9-tallig); 425 (8-tallig); 652 (7-tallig)?

4. Hoeveel verschillende cijfers heeft men noodig in het tientallig, negentallig, achttallig, twaalftallig, elftallig stelsel, en welke zijn die?

Herleiding van een getal uit het tientallig in een ander stelsel.

56. Om het getal 5347 (10-tallig) in het 8-tallig stelsel te schrijven, handelen we aldus:

8 eenheden vormen één 8-tal; zoo vaak dus 8 eenh. in 5347 eenh. begrepen zijn, zoo vaak hebben we één 8-tal.

$$
\begin{array}{l|l}
5347 & 8 \\
\hline
48 & 668 \\
\hline
54 & \\
48 & \\
\hline
67 & \\
64 & \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

We hebben dus:

$$5347 = 668\ (8\text{-t.}) + 3 \text{ eenh.}$$

8 achttallen vormen één 8^2-tal; zoo vaak dus 8 achtt. in 668 (8-t.) begrepen zijn, zoo vaak hebben we één (8^2-t.)

$$
\begin{array}{l|l}
668 & 8 \\
\hline
64 & 83 \\
\hline
28 & \\
24 & \\
\hline
4 &
\end{array}
$$

668 (8-t.) zijn dus gelijk aan 83 (8^2-t.) + 4 (8-t.); daarom is $5347 = 83\ (8^2\text{-t.}) + 4\ (8\text{-t.}) + 3$ eenh.

Acht (8^2-t.) vormen één (8^3-tal); zoo vaak dus 8 (8^2-t.) in 83 (8^2-t.) begrepen zijn, zoo vaak hebben we één 8^3-tal.

Digitized by Google

$$8 \,/\, 83 \,\backslash\, 10$$
$$\underline{80}$$
$$3$$

We hebben dus 83 (8^2-t.) = 10 (8^3-t.) + 3 (8^2-t.)
en daarom ook 5347 = 10 (8^3-t.) + 3 (8^2-t.) + 4 (8-t.) + 3 eenh.
Acht (8^3-t.) vormen één (8^4-tal); 10 (8^3-t.) is gelijk aan
1 (8^4-t.) + 2 (8^3-t.),
dus is 5347 = 1 (8^4-t.) + 2 (8^3-t.) + 3 (8^2-t.) + 4 (8-t.) + 3 eenh.
of 5347 = 12343 (8-tallig stelsel).
De bewerking verricht men kortweg aldus:

8 | 5347	. . . . . 3 eenh.	5347 = 12343 (8-tall. st).
8 | 668	. . . . . 4 (8-tallen)	
8 | 83	. . . . . 3 (8^2-tallen)	
8 | 10	. . . . . 2 (8^3-tallen)	
1	. . . . . 1 (8^4-tal)	

Ander voorbeeld.
Schrijf 8222 in het elftallig stelsel.

11 | 8222	. . . . . 5 eenh.	8222 = 61 t 5 (11-t. st).
11 | 747	. . . . . t (11-t.)	
11 | 67	. . . . . 1 (11^2-t.)	
6	. . . . . 6 (11^3-t.)	

De letter t stelt tien voor.

Herleiding van een getal, dat in een vreemd talstelsel geschreven is, tot het tientallig stelsel.

57. Zij gevraagd 5734 (negent. st.) in het tient. stelsel te schrijven.
Wij merken op, dat het getal bestaat uit:
5 (9^3-t.) + 7 (9^2-t.) + 3 (9-t.) + 4 eenheden.
Eén 9^3-tal is gelijk aan 9 (9^2-tallen), dus 5 (9^3-tallen) zijn $5 \times 9 = 45$ (9^2-tallen).
In het getal komen nog voor 7 (9^2-tallen), dus zijn er in het geheel 52 (9^2-tallen).

Digitized by Google

Eén 9^2-tal is gelijk aan 9 (9-tallen); 52 (9^2-tallen) bevatten dus $52 \times 9 = 468$ (9-tallen).

In het getal komen nog voor 3 (9-tallen), dus zijn er in het geheel 471 (9-tallen).

Eén 9-tal bevat 9 eenheden; 471 (9-tallen) zijn dus $471 \times 9 = 4239$ eenheden, en het getal bevat nog 4 eenheden, dus zijn er in het geheel 4243 eenheden.

Schrijfwijze:

5734 (9-t. st.)
$\times 9$
$45 + 7 = 52$
$\times 9$
$468 + 3 = 471$
$\times 9$
$2439 + 4 = \mathbf{4243}$.

Opgaven.

1. Schrijf 5947 in het achttallig stelsel, 34927 in het negentallig, 23987 in het twaalftallig, 54368 in het negentallig, 3758 in het het zestallig en 24853 in het dertientallig stelsel.
2. Het getal 56 wordt in een ander talstelsel voorgesteld door 70; wat is het grondtal van dit talstelsel?
3. Tot welk talstelsel is 94 herleid, als het geschreven wordt 86?
4. Tel de volgende getallen samen:

achtt. stelsel.	negent. st.	elft. st.
375	8572	64t
423	3647	598
615	2856	736
254	3742	584
367	6358	796

5. Bepaal de volgende verschillen:

zest. stelsel.	achtt. st.	twaalft. st.
524	7643	59 e 7
415	2576	3t 8 e

6. Maak een tafel van vermenigvuldiging voor 7 in het achttallig, voor 9 in het twaalftallig en voor 8 in het negentallig stelsel.
7. Vermenigvuldig:

achtt. st.	negent. st.	twaalft. st.
736	7385	58t7
$\times 5$	$\times 6$	$\times 9$

Digitized by Google

8. Bepaal de volgende quotienten:

achtt. st.	negent. st.	twaalft. st.
53472 : 7	43746 : 8	36639 : 9
14652 : 6	80437 : 5	57901 : e

9. Herleid tot het tientallig stelsel:
71536 (12-t.); 54762 (8-t.); 43521 (6-t.); 24365 (11-t).
10. De getallen 7t en 114 zijn gelijk. Als het tweede in het negentallig stelsel staat, in welk talstelsel staat dan het eerste?
11. Hoeveel getallen worden in het achttallig stelsel met twee cijfers geschreven?
12. Breng 246405 (achttallig st.) over in het zeventallig; 724254 (negentallig) in het twaalftallig stelsel.
13. Een jongen verloor $\frac{1}{8}$ deel zijner knikkers en 5. Hij hield er evenveel over als hij verloor. Hoeveel knikkers had hij?
14. Een boerin verkocht op de markt $\frac{1}{8}$ deel harer eieren en nog 10 en hield toen nog $1\frac{1}{7}$ maal zooveel over, als ze reeds ververkocht had. Hoeveel eieren had ze?
15. Iemand speelt en verliest 10 % van zijn geld. Daarna speelt hij weer en wint nu 15 % van het geld, dat hij nog over had. Hoeveel % heeft hij ten slotte gewonnen?
16. Iemand verkoopt een partij goed voor 400 gld. Had hij 100 gld. meer ontvangen, dan zou hij 4 maal zooveel gewonnen hebben, als hij nu verliest. Hoeveel % verliest hij?
17. Iemand won met zeker kapitaal 10 %. Nadat hij de winst bij het kapitaal gevoegd had, verloor hij op deze som 5 %. Als zijne winst nu nog 85,5 gld. bedraagt, hoe groot was dan zijn kapitaal?
18. Een ander wint met zijn kapitaal 20 %, voegt de winst bij het kapitaal en verliest op de verkregen som 25 %. Met de rest wint hij nog zooveel percent, dat hij zijn eerste kapitaal weer terug heeft. Hoeveel % is dat?
19. Men verdeelt een mandje noten onder eenige kinderen; elk krijgt er 13, waarna er geen noten meer overblijven. Waren er zes kinderen minder, dan zou men aan ieder kind 15 noten kunnen geven, en er zouden ook nu geen noten overblijven. Hoeveel kinderen zijn er?
20. Een boer kocht schapen voor 24 gld. per stuk. Had hij 4 schapen meer ontvangen, dan zou ieder schaap hem maar 23 gld. gekost hebben. Hoeveel schapen kocht die boer?

Digitized by Google

DEELBAARHEID.

58. Bepalingen. *Men zegt, dat een getal* **deelbaar** *is door een ander, als de rest der deeling van het tweede op het eerste nul is.*

Zoo is 35 deelbaar door 5; 48 deelbaar door 8.

Is a deelbaar door b, dan moet a eenige malen b zijn. Men noemt dan a een **veelvoud** van b en b een **deeler** van a. In plaats van **deeler** zegt men ook wel eens **factor.**

Omdat $37 = 1 \times 37$; $59 = 1 \times 59$ is enz., daarom is 1 een deeler van ieder getal.

Omdat $0 = 0 \times 58$; $0 = 0 \times 63$ is enz., daarom is nul deelbaar door ieder getal.

Een getal, dat alleen deelbaar is door 1 *en zich zelf, heet een* **ondeelbaar getal.** Ondeelbare getallen zijn: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, enz.

Laat een getal a bij deeling door vijf 3 tot rest, dan is a eenige malen 5 plus 3. Men kan dan schrijven: $a = b \times 5 + 3$, of $a = 5b + 3$.

Een getal, dat deelbaar is door 2, *noemt men* **even;** *een getal, dat niet deelbaar is door* 2, *noemt men* **oneven.**

Een even getal is dus eenige malen 2 en kan voorgesteld worden door $2a$, of $2b$, of $2c$ enz.

Een oneven getal laat bij deeling door 2 tot rest 1. Een oneven getal is dus eenige malen 2 plus 1 en kan voorgesteld worden door $2a + 1$.

Vragen.

1. Hoe kunt ge voorstellen een drievoud, een vijfvoud, een zesvoud?
2. Wat kan de rest zijn, als men een getal deelt door 5, door 7, door 6?
3. Hoe stelt ge een getal voor, dat bij deeling door 5 tot rest geeft 3?
4. Hoe een ander, dat bij deeling door 6 tot rest geeft 1?

59. Als wij van een getal van vier cijfers de duizendtallen door a, de honderdtallen door b, de tientallen door c en de eenheden door

Digitized by Google

d voorstellen, dan mogen wij het getal niet voorstellen door $abcd$. Immers dit beteekent $a \times b \times c \times d$. Het bedoelde getal kan echter wel voorgesteld worden door:

$$1000a + 100b + 10c + d. \qquad \text{(Waarom?)}$$

Wij zullen echter het getal, dat uit a duizendtallen, b honderdtallen, c tientallen en d eenheden bestaat, voorstellen door $\overline{abcd}$.

Het teeken $\overline{\quad}$ boven de letters geplaatst, heet **ilatie-teeken**, en duidt aan, dat $\overline{abcd}$ niet als een produkt, maar als een getal moet beschouwd worden.

Elk getal, dat uit twee of meer cijfers bestaat, kan gesplitst worden in tientallen en eenheden.

Zoo is $3789 = 378$ tientallen en 9 eenheden. Noemt men de tientallen a en de eenheden b, dan kan men het getal voorstellen door:

$$10a + b \text{ of door } \overline{ab}.$$

Ook kan men het getal 3789 splitsen in 37 honderdtallen en 89 eenheden, ook in 3 duizendtallen en 789 eenheden.

60. Eigenschap I. Als twee of meer getallen ieder deelbaar zijn door een ander, dan is hun som ook deelbaar door dat andere getal.

Gegeven. a, b, c en d zijn deelbaar door p.

Te bewijzen. $a + b + c + d$ is deelbaar door p.

Bewijs.

Omdat a deelbaar is door p, is a gelijk aan een geheel aantal malen p, b.v. $a = m \times p$.

Evenzoo kan men stellen: $b = n \times p$; $c = q \times p$ en $d = r \times p$.

Wij hebben nu:

$$\begin{aligned} a &= m \times p \\ b &= n \times p \\ c &= q \times p \\ d &= r \times p \end{aligned}$$

op

$$a + b + c + d = (m + n + q + r) \times p.$$

De som is dus een geheel aantal malen p en daarom deelbaar door p.

Opmerking. Kiest men in plaats van verschillende getallen, die ieder door p deelbaar zijn, eenige malen hetzelfde getal, dan krijgt men:

Als een getal deelbaar is door p, dan is een veelvoud van het eerste ook deelbaar door p.

Digitized by Google

61. Eigenschap II. Als twee getallen ieder deelbaar zijn door p, dan is hun verschil ook deelbaar door p.

Gegeven: a is deelbaar door p

b „ „ „ p

Te bewijzen: $a - b$ is deelbaar door p.

Bewijs.

Omdat a deelbaar is door p, kan men $a = c \times p$ stellen, en omdat b deelbaar is door p, kan men $b = d \times p$ stellen, (c en d zijn dan geheele getallen).

$$\begin{array}{l} a = c \times p \\ b = d \times p \\ \hline a - b = (c - d)p, \end{array} \quad \text{af}$$

dus is $a - b$ deelbaar door p.

62. Als twee getallen bij deeling door een derde ieder een rest overlaten, dan zal de som der getallen deelbaar zijn door het derde getal, wanneer de som der resten gelijk is aan dat derde getal.

Voorbeeld. Zij $\begin{array}{l} a = p \times 7 + 5 \\ b = q \times 7 + 2 \\ \hline \end{array}$ op

dan is $a + b = (p + q)\,7 + 7 = 7\text{-vd.} + 7\text{-vd.} = 7\text{-voud.}$

Is echter de som der resten niet gelijk aan het derde getal, dan is de som ook niet deelbaar door het derde getal.

Zij $\begin{array}{l} a = 8 \times 7 + 4 \\ b = 9 \times 7 + 5 \\ \hline \end{array}$ af

dan is $a + b = (8 + 9)\,7 + 9 = 7\text{-vd.} + 7\text{-vd.} + 2 = 7\text{vd.} + 2.$

Laten twee getallen bij deeling door een derde ieder een zelfde getal tot rest, dan is het verschil der getallen deelbaar door het derde getal.

Immers als $\begin{array}{l} a = 22 \times 7 + 5 \\ b = \ 6 \times 7 + 5 \text{ is} \\ \hline \end{array}$ af

dan is $a - b = (22 - 6) \times 7$ d. i. een 7-voud.

Zijn de resten der beide getallen echter verschillend, dan is het verschil niet deelbaar door het derde getal.

Zij $\begin{array}{l} a = 13 \times 9 + 8 \\ b = \ 5 \times 9 + 3 \\ \hline \end{array}$ af

dan is $a - b = (13 - 5)\,9 + (8 - 3) = 9\text{-voud} + 5.$

Digitized by Google

Is echter $a = 17 \times 9 + 2$
$b = 13 \times 9 + 5$
af
dan is $a - b = (17 - 13)\,9 + 2 - 5$; d. i. $4 \times 9 + 2 - 5$
of $3 \times 9 + 9 + 2 - 5 = 3 \times 9 + 6 =$ 9-voud + 6.

Opgaven.

1. Als a, b, c en d ieder deelbaar zijn door p, dan is $3a + b - 2c + d$ ook deelbaar door p. Verklaar dit.
2. Als a een zevenvoud is plus 5, b een zevenvoud plus 3 en c een zevenvoud plus 1, wat is dan:
   $a + b + c$; $a - b + c$; $a - b - c$?
3. Vul in:

$a =$ dertienvoud + 5	$a =$ zeventienvoud + 8
$b =$ dertienvoud + 3	$b =$ zeventienvoud + 12
$a + b =$	$a + b =$
$a - b =$	$a - b =$

4. Vul in:
   een zesvoud − 2 = zesvoud +
   een negenvoud − 5 = negenvoud +
   een twaalfvoud + 11 = twaalfvoud −
   een zevenvoud + 5 = zevenvoud −
5. Verklaar, waarom elk getal voorgesteld kan worden door: $3a$ of $3a + 1$ of $3a - 1$; door $5a$ of $5a + 1$ of $5a + 2$ of $5a - 2$ of $5a - 1$.
6. Hoe stelt ge het getal voor, dat op a **volgt**; hoe het getal dat a **voorafgaat?**
7. Van twee op elkaar volgende getallen is altijd één deelbaar door 2. Verklaar dit.
8. Hoe stelt ge drie op elkaar volgende getallen voor? Verklaar, waarom altijd een er van deelbaar is door 3.
9. Als $a =$ zevenvoud + 3 is, dan is:
   $5a =$; $3a =$; $6a =$
10. Vul in:

$a =$ vijfvoud + 3	$a =$ achtvoud + 5
$b =$ vijfvoud + 2	$b =$ achtvoud + 3
$ab =$ vijfvoud + ...	$ab =$ achtvoud + ...

11. Ook: $a =$ negenvoud + 5; $a^2 =$ negenvoud + ...
    $b =$ twaalfvoud + 7; $b^2 =$ twaalfvoud + ...

Digitized by Google

12. Waarmee moet een vijfvoud + 3 vermenigvuldigd worden om een vijfvoud op te leveren?

    En waarmee om een vijfvoud + 1; een vijfvoud + 2; een vijfvoud + 4 op te leveren.

13. Verkoopt iemand zijn waren voor zooveel beneden de 6 gld., als de inkoop er boven is, dan verliest hij 8 %. Hoeveel % verliest hij, als hij zijn waren voor 6 gld. verkoopt, en hoeveel bedraagt dan de inkoop?

14. Verkoopt een koopman zijn goed voor zooveel boven de 25 gld., als de inkoop er beneden is, dan wint hij 50 %. Bereken den inkoop en den verkoop.

15. Als iemand zooveel ouder is dan 40 jaren, als het 9de deel van zijn leeftijd bedraagt, hoe oud is hij dan?

16. A bezit vijfmaal zooveel als B. Verliest B aan A drie gulden, dan bezit A zesmaal zooveel als B. Hoeveel heeft ieder?

17. Een koopman koopt eenige KG. thee voor zesmaal zooveel kwartjes als hij kilogrammen koopt. Verkoopt hij de partij met $\frac{1}{2}$ gld. winst per KG., en geeft hij daarbij 2 % overwicht, dan is de som van in- en verkoop 1765 gld.; hoeveel K.G. koopt hij?

18. Als een meter laken voor 6,125 gld. verkocht wordt, doch op elke 100 M. 12,5 gld. onkosten komen, voor hoeveel is de meter dan ingekocht, als er toch nog 20 % gewonnen wordt?

19. Iemand betaalde van zijn schuld 60 % en van hetgeen hij daarna schuldig bleef nog de helft met 10 gld. Als hij nu nog 30 gld. schuldig was, hoe groot was dan zijn schuld?

20. Van twee tuinen is de eene evenveel vierkante halve DM groot als de andere halve vierkante DM. Als zij $\frac{1}{8}$ HA in grootte verschillen, hoe groot is dan iedere tuin?

Kenmerken van Deelbaarheid.

Eerste Groep.

63. Eigenschap I. Elk getal is een tweevoud of een vijfvoud plus het cijfer der eenheden.

Te bewijzen; $\lceil \overline{abcde} \rceil$ = tweevoud + e.

$\lceil \overline{abcde} \rceil$ = vijfvoud + e.

Digitized by Google

Bewijs.

$\overline{|abcde|}$ bestaat uit $\overline{|abcd|}$ tientallen $+ e$ eenh. en is dus gelijk aan $\overline{|abcd|} \times 10 + e$.

$10 =$ een tweevoud en ook een vijfvoud
$\overline{|abcd|} \times 10 =$ een tweevoud en ook een vijfvoud
$e = e$

op

getal $\overline{|abcde|} =$ een tweevoud $+ e$ en ook een vijfvoud $+ e$.

Gevolg. Een getal is deelbaar door 2 of 5, als het cijfer der eenheden deelbaar is door 2 of 5.

64. Eigenschap II. Elk getal is een viervoud of een vijfentwintigvoud plus het getal, voorgesteld door de twee laatste cijfers aan de rechterhand.

Te bewijzen: $\overline{|abcde|} =$ een viervoud $+ \overline{|de|}$
$\overline{|abcde|} =$ een vijfentwintigvoud $+ \overline{|de|}$.

Bewijs.

$\overline{|abcde|} = \overline{|abc|}$ honderdtallen $+ \overline{|de|}$ eenheden, dus gelijk aan $\overline{|abc|} \times 100 + \overline{|de|}$.

$100 =$ een viervoud en ook een vijfentwintigvoud
$\overline{|abc|} \times 100 =$ een viervoud en ook een vijfentwintigvoud
$\overline{|de|} = \overline{|de|}$

op

$\overline{|abcde|} =$ een viervoud $+ \overline{|de|}$ en ook
$=$ een vijfentwintigvoud $+ \overline{|de|}$.

Gevolg. Een getal is deelbaar door 4 of 25, als het getal, voorgesteld door de twee laatste cijfers aan de rechterhand, deelbaar is door 4 of 25.

65. Evenzoo bewijst men:

Eigenschap III. Een getal is gelijk aan een 8-voud of een 125-voud plus het getal, voorgesteld door de drie laatste cijfers aan de rechterhand.

Gevolg. Een getal is een 8-voud of een 125-voud, als het getal, voorgesteld door de drie laatste cijfers aan de rechterhand, deelbaar is door 8 of 125.

Opmerking. De kenmerken van deelbaarheid uit deze groep hebben betrekking op de deelers 2 en 5 van het grondtal 10, en op de machten van die deelers. Dezelfde eigenschappen gaan in een

Digitized by Google

ander talstelsel ook door voor de deelers of de machten van de deelers van het grondtal.

Zoo is in het zestallig stelsel:

elk getal = { een tweevoud + het laatste cijfer rechts. / een drievoud + het laatste cijfer rechts.

elk getal = { een 2^2-voud + het getal gevormd door de twee laatste cijfers rechts. / een 3^2-voud + het getal gevormd door de twee laatste cijfers rechts.

Vraag. Wanneer is in het twaalftallig stelsel een getal deelbaar door: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16, 36?

Tweede Groep.

66. Eigenschap I. Elke term der schaal is een negenvoud plus 1.

$$10 = 9 + 1 = \text{een negenvoud} + 1$$
$$100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1 = \text{een negenvoud} + 1$$
$$1000 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1 = \text{een negenvoud} + 1$$

enz.

67. Eigenschap II. Elk getal is een negenvoud plus de som zijner cijfers.

Te bewijzen. $\overline{|abcde|} = \text{een negenvoud} + a + b + c + d + e.$

Bewijs.

$\overline{|abcde|}$ bestaat uit:

c Eenh. $+ d$ T. $+ c$ H. $+ b$ D. $+ a$ TD. en is dus ook gelijk aan $e + 10d + 100c + 1000b + 10000a$ eenh.

Nu is:

	$e =$	. . . . . e
$10d = (9\text{-vd.} + 1)d =$		een negenvoud $+ d$
$100c = (9\text{-vd.} + 1)c =$		een negenvoud $+ c$
$1000b = (9\text{-vd.} + 1)b =$		een negenvoud $+ b$
$10000a = (9\text{-vd.} + 1)a =$		een negenvoud $+ a$

op

$$\overline{|abcde|} = \text{een negenvoud} + (a + b + c + d + e).$$

Gevolgen. 1. **Een getal is deelbaar door negen, als de som der cijfers deelbaar is door 9.**

2. **Een getal is een drievoud plus de som der cijfers.**

3. **Een getal is deelbaar door drie, als de som der cijfers deelbaar is door 3.**

Opmerking. Deze kenmerken hebben betrekking op het grondtal

Digitized by Google

min één (10 — 1) en de deelers er van. In ieder ander talstelsel is een getal steeds gelijk aan een veelvoud van *het grondtal min* 1 plus de som zijner cijfers. Het bewijs hiervan steunt geheel op de twee vorige eigenschappen.

Opgaven.

1. Wat is de rest, als elk der volgende getallen gedeeld wordt door 9: 378251; 394276; 520384?
2. Wat moet a zijn, als $37a542$ deelbaar is door 9? Wat moet a zijn als $37a542$ wel deelbaar is door 3, maar niet door 9?
3. Als a een negenvoud is plus 7 en b een negenvoud plus 5; waardoor is $a+b$ dan zeker deelbaar?
4. De getallen $\overline{abcdef}$ en $\overline{ceafbd}$ zijn, zooals ge ziet, met dezelfde cijfers geschreven; bewijs dat hun verschil een negenvoud is.
5. Vul in: $777777 = 77 \times \ldots$; $555555 = 55 \times \ldots$ Als een getal met een even aantal zevens geschreven wordt, dan is het deelbaar door . . . .
6. Elke term der schaal, die met een even aantal nullen geschreven wordt, is gelijk aan een 99-voud plus een. Verklaar dit.
7. Een getal is gelijk aan een 99-voud plus de som van de groepen van twee cijfers, waarin het getal te beginnen bij de eenheden verdeeld kan worden; aldus:
$$\overline{abcdefg} = 99\text{-voud} + \overline{fg} + \overline{de} + \overline{bc} + a.$$
8. Wanneer is in het negentallig stelsel een getal deelbaar door 8, of door 4?
Wanneer is in het elftallig stelsel een getal deelbaar door 5?
9. Elke term van ons talstelsel is een zesvoud plus vier. Verklaar dit.
10. Elk getal is gelijk aan een zesvoud, vermeerderd met het cijfer der eenheden plus viermaal de som der andere cijfers. Bewijs dit.

Derde Groep.

68. Eigenschap I. Elke term der schaal van ons talstelsel, die met een even aantal nullen geschreven wordt, is een elfvoud plus één.

Bewijs.

$$100 = 99 + 1 = 11 \times 9 + 1 = \text{een elfvoud} + 1.$$
$$10000 = 9999 + 1 = 11 \times 909 + 1 = \text{een elfvoud} + 1.$$
$$1000000 = 999999 + 1 = 11 \times 90909 + 1 = \text{een elfvoud} + 1.$$

enz.

Digitized by Google

69. Eigenschap II. Elke term der schaal van ons talstelsel, die met een oneven aantal nullen geschreven wordt, is een elfvoud min één.

Bewijs.

$10 = 11 - 1 =$ een elfvoud $- 1$.

$1000 = 10 \times 100 = 10$ (een elfvoud $+ 1$) $=$ een elfvoud $+ 10$
$=$ een elfvoud $- 1$.

$100000 = 10 \times 10000 = 10$ (een elfvoud $+ 1$) $=$ een elfvoud $+ 10$
$=$ een elfvoud $- 1$.

enz.

70. Eigenschap III. Elk getal is gelijk aan een elfvoud plus de som van de cijfers op oneven plaats, min de som van de cijfers op even plaats, gerekend van af de eenheden.

Te bewijzen: $\boxed{abcdefg} =$ elfvoud $+ (g + e + c + a) - (f + d + b)$.

Bewijs.

$\boxed{abcdefg} = g + 10f + 100e + 1000d + 10000c + 100000b + 1000000a$.

Nu is:

$g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad g$

$10f = f \times \quad 10 = f$ (elfvoud $- 1$) $=$ een elfvoud $- f$

$100e = e \times \quad 100 = e$ (elfvoud $+ 1$) $=$ een elfvoud $+ e$

$1000d = d \times \quad 1000 = d$ (elfvoud $- 1$) $=$ een elfvoud $- d$

$10000c = c \times \quad 10000 = c$ (elfvoud $+ 1$) $=$ een elfvoud $+ c$

$100000b = b \times \quad 100000 = b$ (elfvoud $- 1$) $=$ een elfvoud $- b$

$1000000a = a \times \quad 1000000 = a$ (elfvoud $+ 1$) $=$ een elfvoud $+ a$

op

$\boxed{abcdefg} =$ een elfvoud $+ a - b + c - d + e - f + g$
$=$ een elfvoud $+ (a + c + e + g) - (b + d + f)$

Gevolg. Een getal is deelbaar door elf, als de som der cijfers van oneven plaats, verminderd met de som der cijfers van even plaats, deelbaar is door elf.

Opmerking. Is de som der cijfers van oneven plaats minder dan de som der cijfers van even plaats, dan vindt men de rest der deeling door 11, door de som der cijfers van oneven plaats met een elfvoud te vermeerderen en daarna met de som der cijfers van even plaats te verminderen.

Immers is b.v. de som der cijfers op oneven plaats 8 en die der cijfers op even plaats 17, dan is het getal gelijk aan:

een elfvoud $+ 8 - 17 =$ een elfvoud $+ 11 + 8 - 17 =$
$=$ een elfvoud $+ 19 - 17 =$ een elfvoud $+ 2$.

Digitized by Google

Men kan ook zeggen:

een elfvoud + 8 — 17 = een elfvoud — 9 = een elfvoud + 2.

Opmerking. De eigenschappen uit deze groep hebben betrekking op het grondtal tien plus één. Zij gaan onveranderd door voor elk talstelsel.

Opgaven.

1. Welke resten laten de volgende getallen bij deeling door elf: 378594; 384659; 937861?
2. Welk cijfer moet a in de volgende getallen voorstellen, opdat die getallen deelbaar zijn door elf; 594a37; 72a83; 59a82.
3. Bewijs voor het zeventallig stelsel de volgende eigenschappen:
   a. Elke term der schaal met een even aantal nullen is een achtvoud plus één.
   b. Elke term der schaal met een oneven aantal nullen is een achtvoud min één.
   c. 356421 = achtvoud + (1 + 4 + 5) — (2 + 6 + 3).
4. Bewijs, dat in het tientallig stelsel een getal deelbaar is door elf, als de som van de groepen van twee cijfers waarin het getal, te beginnen bij de eenheden, kan verdeeld worden, deelbaar is door elf.
   $\overline{abcdefg}$ is een elfvoud, als $\overline{fg} + \overline{de} + \overline{bc} + a$ deelbaar is door elf.
5. Als $a =$ vijfvoud + 4 is, dan is $7a =$ . . . voud + 28
   „ $a =$ zevenvoud + 3 is, dan is $5a =$ . . . voud + 15
   af
   $2a =$ . . . voud + 13.
   Vul dit in.
6. Als $11a =$ dertienvoud + 9, en $2a =$ dertienvoud + 5 is, dan is $a =$ dertienvoud + . . . Vul ook dit in.
7. Als een getal bij deeling door 7 tot rest 6, en bij deeling door 5 tot rest 4 geeft, wat is dan de rest bij deeling door 35?
8. Deelt men een getal door 8, dan is de rest 4; deelt men het door 6, dan is de rest 2. Wat is de rest bij deeling door 24?
9. Als ge weet, dat $999 = 9 \times 111 = 27 \times 37$ is, bewijs dan de volgende eigenschappen:
   a. Elk getal is een 999-voud plus de som der getallen, die men verkrijgt, door het getal te beginnen bij de eenheden in vakjes van drie cijfers te splitsen.

Digitized by Google

$|\overline{ab\,|\,cde\,|\,fgh}| = 999\text{-voud} + |\overline{fgh}| + |\overline{cde}| + |\overline{ab}|$.

b. Als men een getal, te beginnen bij de eenheden, in vakjes van drie cijfers splitst, en de som van de getallen, die men daardoor verkrijgt, is deelbaar door 27 of 37, dan is het geheele getal deelbaar door 27 of 37.

10. Als een getal bij deeling door zeven 4 tot rest, en bij deeling door negen 5 tot rest geeft, wat is dan de rest bij deeling door 63?
11. Een getal laat bij deeling door 7 drie tot rest, bij deeling door 8 is de rest 5, en bij deeling door 5 is de rest 2. Wat is de rest bij deeling door $7 \times 8 \times 5$?
12. Als gegeven is dat

$$a = \begin{cases} \text{achtvoud} + 3 \\ \text{zesvoud} + 5 \\ \text{vijfvoud} + 4. \end{cases}$$

Wat is dan de rest, als men a deelt door 120?

Vierde Groep.

71. De kenmerken van deelbaarheidu it de vorige groepen hebben alle betrekking op deelers, die met het grondtal of met het grondtal plus of min één samenhangen.

Men kan echter in het tientallig stelsel kenmerken vinden voor elk willekeurig ondeelbaar getal, b.v. voor 7, 13, 17, 19 enz., en wel voor ieder getal twee kenmerken, die veel overeenkomst vertoonen. Wij zullen die twee kenmerken voor het getal 7 verklaren.

Eerste kenmerk. Men tracht te vinden een veelvoud van 7, dat op 1 eindigt; dit is 21. Hiervan laat men de eenheden (1) weg, waarna men **2** overhoudt. Het kenmerk luidt nu:

Een getal is deelbaar door 7, als tweemaal het cijfer der eenheden, van het overblijvende deel van het getal afgenomen, een rest oplevert, die deelbaar is door 7.

Zoo zal 65896 deelbaar zijn door 7, als $6589 - 2 \times 6$ deelbaar is door 7.

Om dit te bewijzen, bedenke men, dat ieder getal gesplitst kan worden in tientallen en eenheden. Stellen wij de tientallen voor door a en de eenheden door b, dus het getal door $10a + b$, dan hebben wij volgens de eigenschap:

Gegeven: $a - 2b = 7\text{-voud}$.

Te bewijzen: $10a + b = 7\text{-voud}$.

Digitized by Google

Bewijs.

$$\begin{array}{r} a - 2b = 7\text{-voud} \\ \hline 10a - 20b = 7\text{-voud} \end{array} \times 10$$

$$\begin{array}{r} 21b = 7\text{-voud} \\ \hline 10a + b = 7\text{-voud.} \end{array} \text{ op}$$

Toepassing.

Nemen wij nu nog eens het getal 65896. Dit zal deelbaar zijn door 7, als $6589 - 12 = 6577$ deelbaar is door 7.

6577 is deelbaar door 7, als $657 - 14 = 643$ deelbaar is door 7; dit is deelbaar door 7, als $64 - 6 = 58$ deelbaar is door 7. Nu weet men, dat dit niet het geval is, derhalve is 65896 ook niet deelbaar door 7.

De bewerking schrijft men gemakkelijk aldus:

65896
12
6577
14
643
6
58

Opgaven 1. Zoek ook zoo'n kenmerk voor 13, 17, 19.
2. Onderzoek of de getallen 59483, 278596, 4873691, deelbaar zijn door 7, 13 en 17.

Tweede kenmerk voor 7. Men tracht te vinden een 7-voud, dat op 9 eindigt; dit is 49.

Hierbij telt men 1 op en laat de nul weg; men krijgt dan 5. Het kenmerk luidt nu:

Een getal is deelbaar door 7, als 5 maal het cijfer der eenheden, bij het overblijvende deel van het getal opgeteld, een som oplevert, die deelbaar is door 7.

Gegeven: $a + 5b = 7\text{-voud}$

Te bewijzen: $10a + b = 7\text{-voud.}$

Bewijs.

$$\begin{array}{r} a + 5b = 7\text{-voud} \\ \hline 10a + 50b = 7\text{-voud} \end{array} \times 10$$

$$\begin{array}{r} 49b = 7\text{-voud} \\ \hline 10a + b = 7\text{-voud.} \end{array} \text{ af}$$

Digitized by Google

Opgaven.

1. Zoek een kenmerk van deelbaarheid voor 13, 17, 19 en 23.
2. Onderzoek met behulp van dit kenmerk of de getallen 58964; 38792; 683751, deelbaar zijn door 7 en 13.
3. Iemand koopt suiker met 8 % overwicht voor 54 ct. per KG. en verkoopt ze zonder overwicht voor 60 ct. per KG. Hoeveel wint hij op een bestelling van 100 KG.?
4. Iemand koopt koffie met 5 % overwicht voor 60 ct. per KG. en verkoopt ze zonder overwicht tegelijk voor 63 ct. per KG., waardoor hij in het geheel 24,60 gld. wint. Hoeveel KG. heeft hij gekocht?
5. Iemand kocht een partij gekorven tabak met 10 % overwicht voor 48 ct. per KG. Bij verkoop ontvangt hij 60 ct. per KG., doch weegt 5 % in; hoeveel % bedroeg zijn winst?
6. Een winkelier heeft thee van 2,50 gld. en van 1,80 gld. per KG., waarvan hij door menging 350 KG. thee van 2 gld. wil verkrijgen. Hoeveel KG. moet hij van iedere soort nemen?
7. Een koopman verkoopt van een partij satijn de helft tegen 80 ct. per meter en wint dan 104 gld. De andere helft verkoopt hij tegen 45 ct. den meter en verliest dan 36 gld. Uit hoeveel meter bestaat die partij?
8. Iemand kocht 25 HL. erwten van 9 gld. den HL. en vermengde die met een andere soort van 12 gld. den HL. Hij verkocht dit mengsel met 25 % winst voor 12½ gld. den HL. Hoeveel HL. van 12 gld. heeft hij gebruikt?
9. A heeft twee soorten spiritus, 10 L. van 48 % en 5 L. van 42 %. Als hij beide soorten vermengt, van welk gehalte is dan het mengsel?
   Vul aan: Op elke liter van de eerste soort bevinden zich . . . cL. zuivere spiritus, en op elke liter van de tweede soort . . . cL. zuivere spiritus.
   10 L. eerste soort bevatten . . . cL. zuivere spiritus.
   5 L. tweede „ „ . . . „ „ „
   15 L. mengsel „ . . . „ „ „
   1 L. „ bevat . . . „ „ „
   Het mengsel is dus van . . . %.
10. Hoeveel liter water moet men bij 1 HL. spiritus van 90 % voegen om spiritus van 75 % te krijgen?

Digitized by Google

11. Bij 80 L. spiritus van 70 % voegt men 14 L. water en 6 L. spiritus van 66⅔ %. Van welk gehalte is het mengsel?
12. A heeft thee van 2½ gld. per KG. en B. van 2 gld. per KG. Als A 80 KG. minder heeft dan B en de beide hoeveelheden samen 700 gld. waard zijn, hoeveel KG. heeft dan ieder?
13. P heeft koffie van 80 ct. per KG. en Q koffie van 72 ct. per KG. Als P 60 KG. meer heeft dan Q en de koffie van P 55,20 gld. meer waard is dan die van Q, hoeveel KG. heeft dan ieder?
14. A heeft laken van 4 gld. en B van 6 gld. den meter. Als A 10 meter meer heeft dan B, en de meters van B toch 20 gld. meer waard zijn dan die van A, hoeveel meter heeft dan ieder?
15. Van uit twee plaatsen A en B rijden twee ruiters elkaar tegemoet. De ruiter uit A legt per uur 16 KM., die uit B 14 KM. per uur af. Als de eerste 1 uur vroeger weggereden is en bij de ontmoeting 24 KM. meer blijkt afgelegd te hebben dan de tweede, hoe ver liggen dan A en B van elkaar?
16. Breng 72854 (negent. st.) over in het twaalftallig stelsel.
17. Een koopman verkoopt een partij laken zoodanig, dat hij op 12 M. den inkoop van 3 M. wint. Zoo zijn geheele winst 75 gld. bedraagt, hoe hoog was dan de verkoop?
18. P verkoopt een partij koffie, die hij voor 200 gld. ingekocht heeft, voor 65 ct. per KG. Zoo hij op 15 KG. den inkoop van 4½ KG. wint, bereken dan hoeveel KG. hij verkocht heeft?
19. In een mand liggen achtmaal zooveel appels als peren; neemt men er 15 appels uit, dan blijven er nog vijfmaal zooveel appels als peren in. Hoeveel appels en hoeveel peren liggen in die mand?
20. Vul dit in:
    Jan heeft tienmaal zooveel noten als appels. 's Morgens at hij 10 noten en 1 appel op, en hield toen nog . . . maal zooveel noten als appels over. 's Middags at hij nog 4 noten op, daardoor hield hij . . . noten minder dan . . . maal het aantal appels over.
21. Een boer had twaalfmaal zooveel kippen als ganzen. 's Maandags verkocht hij 12 kippen en een gans, en Donderdag nog 4 kippen, waardoor hij tienmaal zooveel kippen als ganzen overhield. Hoeveel kippen en ganzen had die boer?
22. A had negenmaal zooveel kwartjes als dubbeltjes in den spaarpot. Hij koopt een passerdoos en betaalt daarvoor 22 kwartjes en 2 dubbeltjes. Als hij nu nog zevenmaal zooveel kwartjes als dub-

Digitized by Google

beltjes overhoudt, hoeveel kwartjes en dubbeltjes zaten dan in den spaarpot?

23. In een winkel liggen een stuk linnen en een stuk katoen; het linnen is zesmaal zoo lang als het katoen. Men verkoopt 48 M. linnen en 11 M. katoen, waarna men nog achtmaal zooveel linnen als katoen overhoudt. Hoe lang is ieder stuk?
24. Eenige jongens deelen een partijtje noten; ieder krijgt er 15. Waren er drie jongens minder geweest, dan hadden de anderen er ieder 5 meer gekregen. Hoeveel noten zijn er?
25. Een kapitaal wordt verdeeld onder 12 erfgenamen. Waren er maar 10 erfgenamen, dan zou ieder 500 gld. meer gekregen hebben. Hoe groot is de erfenis?
26. Eenige jongens deelen gelijkelijk een hoeveelheid kersen en ieder krijgt er 60. Waren er vijf jongens meer geweest, dan had ieder er 12 minder gekregen. Hoeveel jongens zijn er?
27. A heeft viermaal zooveel geld als B. Geeft men ieder nog 28 gld. dan heeft A tweemaal zooveel als B. Hoeveel geld heeft ieder?
28. Om een portret in een lijst te zetten, heeft men een stuk glas noodig, dat 7,5 dM. lang en 5,4 dM. breed is. Als het glas 4 mM. in het hout der lijst steekt en deze 6 cM. breed is, vraagt men naar de oppervlakte van de lijst.
29. Een vrouw koopt op de markt een partij eieren, de 8 voor een kwartje. Hoeveel moet zij er voor een gouden tientje geven om 25 % te winnen?
30. Een koopman verliest op een partij laken 10 %. Hoeveel percent zou hij winnen, als verkoop en inkoop verwisseld konden worden?

Digitized by Google

ONTBINDING IN FACTOREN.

72. Het getal 240 is gelijk aan $4 \times 6 \times 10$. Men zegt nu, dat 240 **in factoren ontbonden is.**

Bepaling. *Onder* **het ontbinden** *van een getal in ondeelbare factoren verstaat men de ondeelbare factoren bepalen, waarvan het produkt gelijk is aan het gegeven getal.*

Zoo is $240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ of korter $= 2^4 \times 3 \times 5$.

Om een getal, b.v. 756, in zijn ondeelbare factoren te ontbinden, handelt men aldus:

756 is deelbaar door 2 en gelijk aan 2×378;
378 is deelbaar door 2 en gelijk aan 2×189;
derhalve is $756 = 2 \times 2 \times 189$.
189 is deelbaar door 3 en gelijk aan 3×63;
dus is $756 = 2 \times 2 \times 3 \times 63$.
63 is weer gelijk aan 3×21, dus is

$$756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 21.$$

21 is ook nog deelbaar door 3 en gelijk aan 3×7;
dus is $756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$.

Het getal 7 is ondeelbaar, zoodat nu al de ondeelbare factoren van 756 gevonden zijn.

Men schrijft nu: $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$.

	756	
2	378	
2	189	
3	63	$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7.$
3	21	
3	7	
7	1	

Digitized by Google

Opmerking. In vele gevallen kan men het getal, dat in ondeelbare factoren ontbonden moet worden, eerst ontbinden in twee factoren en daarna elk dier twee in ondeelbare. Zoo is 14400 gelijk aan 144×100. Ontbindt men 144 in ondeelbare factoren, dan vindt men $2^4 \times 3^2$; voor 100 zal men vinden $2^2 \times 5^2$.

Derhalve is $14400 = 2^4 \times 3^2 \times 2^2 \times 5^2 = 2^6 \times 3^2 \times 5^2$.

73. Eigenschap. Een getal is deelbaar door een ander, als het al de ondeelbare factoren van dat andere getal bevat met een exponent, die niet kleiner is dan de exponent uit den deeler.

Bewijs.

Wij zullen aantoonen, dat een getal deelbaar is door 72 of $2^3 . 3^2$, als het minstens 3 factoren 2 en 2 factoren 3 bevat.

Heeft het getal drie factoren 2 en twee factoren 3, dan kan men het getal schrijven als een produkt van $2^3 \times 3^2 \times$ een ander getal.

Het is dan gelijk aan $72 \times$ een ander getal en daarom deelbaar door 72.

74. Met behulp van deze eigenschap en de vroeger geleerde kenmerken van deelbaarheid kan men nu onderzoeken, of een getal al dan niet door een **samengestelden deeler** deelbaar is.

Bepaling. *Een* **samengestelde deeler** *is een deeler, die gelijk is aan het produkt van twee of meer ondeelbare factoren.*

Zoo is een getal deelbaar door 24, als het deelbaar is door 2^3 en door 3; derhalve als het getal, door de laatste drie cijfers voorgesteld, deelbaar is door 8, en de som van alle cijfers deelbaar is door 3.

Opgaven.

1. Wanneer is een getal deelbaar door 15, 12, 44, 45, 36, 72, 88?
2. Plaats achter het getal 357 een cijfer zoodanig, dat het nieuwe getal deelbaar is door 12.
3. Ontbind in ondeelbare factoren:
   21600; 999; 9999; 999999; 142857; 571428; 36360; 36036; 7437; 285714.
4. Het getal $584a$ is deelbaar door 11. Wat is a?
5. Bewijs, dat het produkt van drie op elkaar volgende getallen altijd deelbaar is door $1 \times 2 \times 3$ of 6.
6. Als a oneven is, dan is $a^2 - 1$ deelbaar door 8. Waarom?

Digitized by Google

7. Als a oneven is, dan is $a^3 - a$ deelbaar door 24. Bewijs dit. (Ontbind $a^3 - a$ in factoren, en rangschik deze naar hun grootte).
8. Wanneer is in het achttallig stelsel een getal deelbaar door twaalf, door veertien; in het negentallig stelsel door zes, door tien, door vijftien?
9. Verklaar, waarom het produkt van vier op elkaar volgende getallen deelbaar is door 1 . 2 . 3 . 4 of 24.
10. Als a een geheel getal is, dan is $a^5 - a$ deelbaar door 30. Waarom?
11. Verklaar, waarom het verschil van twee op elkaar volgende machten van 5 steeds door 20 en hun som steeds door 30 deelbaar moet zijn.
(Stel die machten voor door 5^{n+1} en 5^n, ontbind hun som en hun verschil in factoren).
12. De som van teller en noemer eener breuk is 108. Telt men bij den teller 2 op en trekt men van den noemer 5 af, dan is de nieuwe breuk gelijk aan $\frac{3}{4}$. Welke was de oorspronkelijke breuk?
13. Van een kapitaal wordt 5000 gld. uitgezet tegen 4 % en de rest tegen $5\frac{1}{2}$ %. Was het geheele kapitaal tegen 5 % uitgezet, dan zou men per jaar 30 gld. meer interest ontvangen. Hoeveel brengt in dit geval de rest minder op dan in het eerste geval?
14. Van twee kapitalen is het eerste groot 9000 gld. en staat uit tegen 4 %. Het andere staat uit à 5 %. Stonden beide kapitalen tegen $4\frac{3}{4}$ % uit, dan zou men 50 gld. meer rente genieten. Hoe groot is het tweede kapitaal?
15. Iemand kocht twee partijen tabak; de eerste partij, groot 250 KG., à 60 ct. per Kilo en de tweede à 75 ct. per KG. Had hij beide partijen voor 70 ct. per KG. gekocht, dan zou hij 5 gld. meer hebben moeten betalen. Hoe groot was de tweede partij?
16. Voor en achter het getal 252 wil men een cijfer voegen zoodanig, dat het nieuwe getal deelbaar zij door 48. Beredeneer, welke die cijfers moeten zijn? (Stel het nieuwe getal voor door $a252b$ en ga eerst na, wat b kan zijn, daarna wat a moet zijn).
17. Vermindert men den noemer eener breuk met 3, dan wordt ze gelijk aan 1. Vermindert men echter den teller met 3, dan wordt haar waarde $\frac{1}{4}$. Welke is die breuk?
(Merk op, dat teller en noemer der breuk 3 verschillen).
18. Als men een getal vermindert met $\frac{3}{10}$ van zijn $\frac{5}{8}$ gedeelte, dan houdt men $7\frac{1}{2}$ meer over dan de helft. Welk is dat getal?
19. Ontbind in de eenvoudigste factoren:
176 (achtt. st.); 2220 (negent. st.); 14465 (elft. st.).

Digitized by Google

20. Een vloerkleed is met den rand 4 M lang en 3 M breed. Als de rand 4 dM breed is, de vierkante halve meter van het binnenste 1,25 gld. en de halve vierkante meter van den rand 3 gld. kost, hoe duur is dan het kleed met den rand?

Aantal deelers van een getal, hun som en hun produkt.

75. Het getal 360 is gelijk aan $2^3 . 3^2 . 5$. Wij zullen nu van 360 alle deelers trachten te vinden, en rekenen dan 1 en 360 als deelers mee.

Wij merken eerst op, dat 360 deelbaar is door 2^3, dus ook door

$$1 — 2 — 4 — 8. \qquad \text{A}$$

Ook is het getal deelbaar door 3^2, dus door 3 en 9; derhalve ook door het produkt van de deelers uit rij A met 3 en met 9, dus door:

$$\left.\begin{array}{l} 3 — 6 — 12 — 24 \\ 9 — 18 — 36 — 72 \end{array}\right\} \qquad \text{B}$$

Ook is het getal deelbaar door 5 en daarom door het produkt der deelers uit A en B met 5, dus door:

$$\left.\begin{array}{l} 5 — 10 — 20 — 40 \\ 15 — 30 — 60 — 120 \\ 45 — 90 — 180 — 360 \end{array}\right\} \qquad \text{C}$$

Om nu het aantal dezer deelers te bepalen merken wij op, dat in rij A als deelers voorkomen de eenheid en de 3 machten van twee, die op het getal deelbaar zijn, dus $3 + 1$ deelers.

De deelers uit groep B zijn verkregen, door die uit A eerst met 3 en later met 9 te vermenigvuldigen. Groep B bevat dus tweemaal zooveel deelers als A.

In A en B komen dus $(2 + 1)$ maal zooveel deelers voor als in A, dus $(2 + 1)(3 + 1)$ deelers.

De deelers uit C zijn verkregen, door die uit A en B met 5 te vermenigvuldigen. Daarom bevat C juist zooveel deelers als A en B, dus bevat A, B en C $(1 + 1)$ maal zooveel deelers als A en B of $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1)$ deelers.

Ander voorbeeld.

Zij het getal $= 2^2 . 3^3 . 5^2$, dan krijgen wij de volgende deelers:

Digitized by Google

1 —	2 —	4	A
3 —	6 —	12	B
9 —	18 —	36	
27 —	54 —	108	
5 —	10 —	20	C
15 —	30 —	60	
45 —	90 —	180	
135 —	270 —	540	
25 —	50 —	100	
75 —	150 —	300	
225 —	450 —	900	
675 —	1350 —	2700	

In A hebben we $2+1$ deelers; in B 3maal zooveel deelers als in A; dus in A en B $(3+1)$ maal zooveel deelers als in A of $(3+1)(2+1)$ deelers.

In C hebben we 2maal zooveel deelers als in A en B, dus in A, B en C $(2+1)$ maal zooveel deelers als in A en B, dus $(2+1)(3+1)(2+1)$ deelers.

Uit het voorgaande volgt nu:

Het aantal deelers van een getal is gelijk aan het gedurig produkt van de exponenten zijner ondeelbare factoren, nadat deze exponenten ieder met 1 *vermeerderd zijn.*

76. Om de som der deelers van het getal $2^2 . 3^3 . 5^2$ uit de vorige paragraaf te bepalen, merken wij op:

De som der deelers uit groep A is:

$$2^2+2+1=\frac{2^3-1}{2-1} \qquad (\text{I}^e \text{ Merkw. Quot}).$$

De deelers uit groep B zijn verkregen, door die uit A met 3, 3^2 en 3^3 te vermenigvuldigen en dus samen (3^3+3^2+3) maal de som der deelers uit A. De deelers uit A en B hebben dus tot som $(3^3+3^2+3+1) \times$ de som der deelers uit A of $\frac{3^4-1}{3-1} \times \frac{2^3-1}{2-1}$.

De deelers uit groep C zijn verkregen, door die uit de groepen A en B met 5 en 5^2 te vermenigvuldigen. Hun som is dus (5^2+5) maal de som van de deelers uit A en B. Daarom is de som van alle deelers (5^2+5+1) maal de som van de deelers uit A en B en dus:

Digitized by Google

$$\frac{5^3-1}{5-1} \times \frac{3^4-1}{3-1} \times \frac{2^3-1}{2-1}.$$

Op dezelfde wijze verklaart men, dat van $2^3 . 3^2 . 5^4 . 7$ de som der deelers is:

$$\frac{2^4-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{5^5-1}{5-1} \times \frac{7^2-1}{7-1}.$$

77. Ter bepaling van het produkt van alle deelers kiezen we het getal 360, waarvan de deelers zijn:

1 — 2 — 4 — 8
3 — 6 — 12 — 24
9 — 18 — 36 — 72
5 — 10 — 20 — 40
15 — 30 — 60 — 120
45 — 90 — 180 — 360.

Neemt men het produkt van het eerste en laatste dan verkrijgt men het ontbonden getal 360.

Eveneens is het produkt van het tweede en voorlaatste 360; ook dat van het derde en voor-voorlaatste, enz.; m. a. w. Het produkt van den eersten en laatsten deeler, alsmede van elke twee deelers, die even ver van de uiterste afstaan is gelijk aan het getal.

Men kan dus de deelers in groepen van twee verdeelen, wier produkt 360 is. Het aantal dier groepen is gelijk aan de helft van het aantal deelers en het produkt van al die groepen is dus gelijk aan:

360 verheven tot een macht, waarvan de exponent gelijk is aan de helft van het aantal deelers.

Opgaven.

1. Ontbind de volgende getallen in ondeelbare factoren, schrijf al hun deelers op en bepaal daarvan de som en het produkt:
   288; 504; 540; 1080.
2. Als een getal een vierkant is, dan heeft het een oneven aantal deelers. Bewijs dit.
3. Bewijs ook het omgekeerde: Als een getal een oneven aantal deelers heeft, dan is het een vierkant.
4. Hoeveel getallen tusschen 1600 en 2500 hebben een oneven aantal deelers.
5. Als a, b, c en d ondeelbare factoren zijn, schrijf dan alle deelers op van:
   a^2b^3c; ab^2c^3d; a^2bc^2d; $a^2b^3cd^2$; $a^3b^2c^3d^2$.

Digitized by Google

6. Bepaal ook de som en het aantal der deelers.
7. Een getal bevat twee factoren 2, drie factoren 3 en eenige factoren 7. Als het aantal deelers 36 bedraagt, hoeveel factoren 7 bevat het dan?
8. Een getal is gelijk aan $3^2 . 5^3 . 2 \cdots$. Als de som van alle deelers gelijk is aan 30420, welke is dan de exponent van 2?
9. A en B hebben samen een jaarlijksch inkomen van 4500 gld. A houdt het $\frac{1}{5}$ en B het $\frac{1}{6}$ deel van zijn inkomen over. Hoeveel zouden ze samen meer overhouden als ieder het $\frac{1}{5}$ deel overhield? En hoeveel minder als ze ieder het $\frac{1}{6}$ deel overhielden?
10. Twee personen hebben samen 4500 gld. inkomen per jaar. De eerste verteert $\frac{4}{5}$, de tweede $\frac{5}{6}$ van zijn inkomen en samen houden ze 830 gld. over. Hoeveel verteert ieder hunner?
11. Iemand verkoopt een partij zaad met $9\frac{2}{5}$ % winst en ontvangt 685 gld. Hoe groot is die partij, als de winst gelijk is aan den verkoop van 75 KG.?
12. P heeft twee partijen thee, samen bedragende 480 KG. Van de eerste partij verkoopt hij de helft en van de tweede het $\frac{2}{3}$ deel en houdt nu nog 50 KG. minder dan de helft van beide partijen over. Hoe groot was iedere partij?
13. Drie kapitalen klimmen met 1000 gld. op en staan respectievelijk uit à 4 %, $4\frac{1}{2}$ % en 5 % 's jaars. Hoeveel zouden die kapitalen jaarlijks minder opbrengen, als ze even groot waren als het eerste? Bereken nu de kapitalen, als ge weet dat ze jaarlijks 2170 gld. opbrengen?
14. A heeft drie huizen gekocht. Het tweede kostte hem 5000 gld. meer dan het eerste, het derde 2000 gld. minder dan het tweede. Hij verhuurt die huizen en stelt de huur op $6\frac{1}{2}$ % van de koopsom. Als hij van de drie samen 1690 gld. huur trekt, voor hoeveel heeft hij dan ieder huis gekocht?
15. Het getal $a2157b$ is deelbaar door 44. Beredeneer, welke cijfers door a en b voorgesteld zijn.

GROOTSTE GEMEENE DEELER.

78. Bepalingen. *Een getal, dat op twee of meer andere getallen deelbaar is, noemt men een* **gemeenen deeler** *van die getallen.*
Zoo is 6 een gemeene deeler van 12, 18, 30 en 42.

Digitized by Google

Het grootste getal, dat op twee of meer andere getallen deelbaar is, heet **de grootste gemeene deeler** *van die getallen.*

Het woord **grootste gemeene deeler** wordt meestal aangeduid door G. G. D.

79. Eigenschap. De G. G. D. van eenige getallen is gelijk aan het produkt van de gemeenschappelijke factoren dier getallen, ieder voorzien met den kleinsten exponent, waarmee die factor in een van de getallen voorkomt.

Bewijs.

Zij $A = 2^3 . 3^2 . 5 . 7^3$; $B = 2^2 . 3^3 . 5^2 . 13$ en $C = 2^3 . 3 . 5^2 . 11$, dan moeten wij bewijzen, dat de G. G. D. van de getallen A, B en C gelijk is aan $2^2 . 3 . 5$.

Vooreerst merken wij op, dat $2^2 . 3 . 5$ een gemeene deeler is van die getallen, omdat elk getal minstens twee factoren 2, één factor 3 en één factor 5 bevat.

We zullen nu aantoonen, dat de getallen geen grooteren gemeenen deeler hebben.

De G. G. D. kan niet meer dan twee factoren 2 bevatten, omdat anders B en C er niet door deelbaar zouden zijn.

Ook kan de G. G. D. niet meer dan één factor 3 bevatten, daar anders C er niet door deelbaar zou zijn.

Eveneens kan de G. G. D. niet meer dan één factor 5 bevatten.

Bovendien kan hij geen anderen factor meer bevatten. Dus is $2^2 . 3 . 5$ de grootste van alle gemeene deelers en daarom de G. G. D.

Om derhalve den G. G. D. van eenige getallen te bepalen, ontbinde men die getallen in factoren en bepale het produkt van de gemeenschappelijke factoren, ieder met den kleinsten exponent.

80. Eigenschap. Als men twee of meer getallen door een gemeenschappelijken factor deelt, dan wordt ook hun G. G. D. er door gedeeld.

Bewijs.

Als de G. G. D. drie factoren 2 bevat, zal een of meer van de drie getallen slechts drie factoren 2 bevatten. Wordt nu elk getal door 2 gedeeld, dan bevat dit getal slechts twee factoren 2, zoodat ook de G. G. D. slechts twee factoren 2 mag bevatten.

De andere factoren hebben geen verandering ondergaan, dus is de G. G. D. tweemaal zoo klein geworden.

Digitized by Google

Vergelijk:

$$\left.\begin{array}{l} A = 2^4 . 3^3 . 5^2 . 7 \\ B = 2^3 . 3^3 . 5 . 11 \\ C = 2^3 . 3^2 . 5^2 . 7 . 11 \end{array}\right\} \text{G. G. D.} = 2^3 . 3^2 . 5$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 2^3 . 3^2 . 5^2 . 7 \\ B = 2^2 . 3^3 . 5 . 11 \\ C = 2^2 . 3^2 . 5^2 . 7 . 11 \end{array}\right\} \text{G. G. D.} = 2^2 . 3^2 . 5$$

Opmerkingen. 1. Deelt men ieder van twee of meer getallen door hun G. G. D., dan is de G. G. D. hunner quotienten 1. Getallen, die 1 tot G. G. D. hebben, heeten **onderling ondeelbaar (O. O.)**.

2. Moet men van eenige getallen den G. G. D. bepalen en merkt men op, dat die getallen een factor gemeen hebben, dan deele men die getallen door den gemeenschappelijken factor en vermenigvuldige den G. G. D. der quotienten met dien gemeenschappelijken factor.

Voorbeeld. *Den G. G. D. van* 1080; 14400 *en* 3672 *te bepalen.*

Elk der getallen is deelbaar door 36; deelt men ieder getal door 36, dan zijn de quotienten: 30, 400 en 102. Hiervan is de G. G. D. 2, dus is de G. G. D. van de gegeven getallen 36×2 of 72.

Opgaven.

1. Bepaal den G. G. D. van: 333, 555 en 3774; 592, 999 en 407; 816, 1104 en 1296; 24^3, 18^4 en 48^3; 180^5, 720^3 en 108^4.
2. Als de G. G. D. van A en B twaalf is, wat kan dan de G. G. D. zijn van 3A en B; 3A en 2B; 6A en 4B?
3. Als a, b, c en d ondeelbare factoren zijn, wat is dan de G. G. D. van: a^3b^2 en a^2b; a^2b^3c en $a^2b^2c^2$; $a^2b^3c^4$ en a^4bc^3; $a^2b^3cd^2$ en $ab^2c^2d^3$; $a^4b^5c^6d^8$ en $a^3b^2c^4d^5$?
4. Bepaal eveneens den G. G. D. van:
   $12a^2b$ en $18ab^2$; $24a^3b^4c$ en $36a^4b^2c^3$; $72a^3b^4c$ en $108a^3bc^2d$; $240a^3b^4c^2d$ en $264a^5b^3cd^2$.
5. Een getal bestaat uit tien zessen, gevolgd door tien zevens. Wat is de rest bij deeling door 9, door 11, door 8?
6. Een jongen deelt een getal door 6 en het quotient nog door 7. Als de eerste rest 5 en de tweede rest 4 is, wat zal dan de rest zijn, als hij het getal door 42 deelt?
   (*Aanwijzing.* Getal $= 6 \times Q_1 + 5$ en $Q_1 = 7 \times Q_2 + 4$, dus Getal $= 6 \times (7 \times Q_2 + 4) + 5 = 42 \times Q_2 + \ldots$)
7. Een getal laat bij deeling door 5 tot rest 3. Deelt men het quotient door 6, dan is de rest 1, en deelt men dit laatste

Digitized by Google

quotient door 8, dan is de rest 7. Wat zal de rest zijn, als men dit getal deelt door $5 \times 6 \times 8$ of 240?

8. Als men twee getallen door hun G. G. D. deelt, is de som der quotienten 12. Welke zijn die getallen, als de G. G. D. 42 is?
9. Een tuin is 72 M lang en 35 M breed. Door de lengte en de breedte loopt een pad van 80 cM en langs de zijden paden van 90 cM breedte. Hoeveel M^2 wordt door de paden ingenomen?
10. Op een partij goederen, die voor 660 gld. verkocht werden, heeft men $\frac{1}{17}$ van den inkoop verloren. Hoeveel % zou men gewonnen hebben, als men de partij voor 900 gld. had kunnen verkoopen?
11. Tegen welk percent is een kapitaal van 2400 gld. uitgezet, als het na 9 maanden met den interest 2481 gld. groot is?
12. Een kapitaal, groot 6000 gld., staat 8 maanden lang tegen 5 % 's jaars uit. Tegen welk percent moeten 5000 gld. uitgezet worden, om in 15 maanden evenveel interest op te brengen, als het eerste kapitaal in 8 maanden?
13. Iemand heeft 8000 gld. ter leen ontvangen tegen $4\frac{1}{2}$ % 's jaars, onder voorwaarde, dat hij ieder jaar 1000 gld. van het kapitaal zal aflossen. Hoeveel rente heeft die man de eerste vier jaren meer te betalen, dan de laatste vier?
14. Iemand koopt een stuk laken van 5 gld. per M, dat hij verplicht is weer tegen 4 gld. per M te verkoopen. Bij uitmeting blijkt, dat hij 5 M meer ontvangen heeft, dan hij betaalde, waardoor hij zijn inkoop terug ontving. Hoeveel meter heeft hij besteld?

---

81. Eigenschap. Als de rest der deeling van A op B gelijk is aan R, dan hebben A en B dezelfde gemeene deelers als A en R.

Bewijs.

Noemen wij Q het quotient der deeling van A op B, dan is

$$B = A \times Q + R, \qquad (1)$$

en

$$B - A \times Q = R. \qquad (2)$$

Als wij willen bewijzen, dat A en B dezelfde gemeene deelers hebben als A en R, dan moeten we aantoonen, dat elke gemeene deeler van het eerste paar getallen ook in het tweede paar voor-

Digitized by Google

komt, en dat ook omgekeerd elke gemeene deeler van het tweede paar een gemeene deeler is van het eerste paar.

Bewijs van het eerste gedeelte.

Elke gemeene deeler van A en B is ook een gemeene deeler van B en $A \times Q$, dus ook een deeler van hun verschil, dat is R (2), en daarom een gemeene deeler van A en R.

Bewijs van het tweede gedeelte.

Elke gemeene deeler van A en R is ook een gemeene deeler van $A \times Q$ en R, dus ook een deeler van hun som, dat is B (1), en daarom ook een gemeene deeler van A en B.

Gevolg. De G. G. D. van A en B is dezelfde als die van A en de rest der deeling van A op B.

Toepassing.

148) 703 (4
592
111

Elke gemeene deeler van 148 en 703 is ook een gemeene deeler van 148 en 111, en omgekeerd elke gemeene deeler van 148 en 111 is ook een gemeene deeler van 148 en 703.

Is dit waar voor elken gemeenen deeler, dan is het ook waar voor hun G. G. D. Hieruit volgt dan:

De G. G. D. van 148 en 703 is dezelfde als de G. G. D. van 148 en 111.

In plaats van den G. G. D. van 148 en 703 te bepalen, kan men dus dien van 148 en 111 zoeken.

Deelt men 111 op 148, dan is de rest 37.

111) 148 (1
111
37

De G. G. D. van 111 en 148 is dezelfde als die van 111 en 37. Deelt men nu 37 op 111, dan blijkt, dat 37 de G. G. D. is van 111 en 37, dus ook van 111 en 148 en daarom ook van 148 en 703.

Hieruit volgt de regel:

Om den G. G. D. van twee getallen te bepalen, deele men het kleinste getal op het grootste, de rest op het kleinste, de nieuwe rest op den vorigen deeler enz., tot eindelijk de deeling opgaat. **De laatste deeler is de G. G. D.**

Digitized by Google

Voorbeeld.

Bepaal den G. G. D. van 689 *en* 1219.

$$
\begin{array}{r}
689 \;)\; 1219 \;(\; 1 \\
\underline{689} \\
530 \;)\; 689 \;(\; 1 \\
\underline{530} \\
159 \;)\; 530 \;(\; 3 \\
\underline{477} \\
53 \;)\; 159 \;(\; 3 \\
\underline{159} \\
0
\end{array}
$$

De G. G. D. is 53.

Opmerkingen. 1. De quotienten 1, 1, 3 en 3, die men bij het zoeken van den G. G. D. vond, heeten **wijzergetallen.** Men schrijft ze meestal tusschen accoladen: {1, 1, 3, 3}, en dan vormen ze den **betrekkingswijzer.**

2. Bij het bepalen van den G. G. D. van twee getallen door deeling kan men vaak bekortingen invoeren.

Zij b.v. gevraagd den G. G. D. te bepalen van 3484 en 4221, dan merken wij op, dat het eerste getal deelbaar is door 4, en daar het tweede geen factor 2 bevat, verandert de G. G. D. niet, als men het eerste getal door 4 deelt.

Daar het tweede getal den factor 9 bevat en in het eerste geen factor 3 voorkomt, zal de G. G. D. ook niet veranderen, als men het tweede getal door 9 deelt.

Wij zoeken dus den G. G. D. van 3484 : 4 en 4221 : 9, dat is van 871 en 469.

$$
\begin{array}{r}
469 \;)\; 871 \;(\; 1 \\
\underline{469} \\
402
\end{array}
$$

In plaats van nu den G. G. D. van 402 en 469 te zoeken, deelen we 402 eerst door 6, een factor die O. O. is met 469.

$$
\begin{array}{r}
67 \;)\; 469 \;(\; 7 \\
\underline{469} \\
0
\end{array}
$$

De G. G. D. van 3484 en 4221 is dus 67.

3. Uit het bewijs der eigenschap, in het begin van deze paragraaf genoemd, volgt, **dat elke gemeene deeler van twee getallen ook een deeler is van hun G. G. D.**

Digitized by Google

82. Eigenschap. Als $A \times B$ deelbaar is door C en A onderling ondeelbaar is met C, dan is B deelbaar door C.

Bewijs.

Omdat A en C onderling ondeelbaar zijn is hun G. G. D. 1 (Zie § 80), dus is de G. G. D. van $A \times B$ en $B \times C$ ook $B \times 1$ of B.

Daar C deelbaar is op $A \times B$ en ook op $B \times C$, is C ook deelbaar op hun G. G. D., dat is op B.

Opgaven.

1. Zoek den G. G. D. van 42427 en 110751; 1232214 en 1557799; 2220330 en 2287260; 5279600 en 560790; 4116924 en 2571636; 5479848 en 9112510.
2. Als $3a$ deelbaar is door 24, dan is a een achtvoud. Waarom?
3. Als van vijf op elkaar volgende getallen de som deelbaar is door 15, wat weet ge dan van het middelste getal?
4. Als een getal onderling ondeelbaar is met 6, door welke van de volgende vormen kan het getal dan voorgesteld worden:
   $6a$, $6a+1$; $6a+2$; $6a+3$; $6a+4$; $6a+5$?
5. Als a onderling ondeelbaar is met 6, dan is $a^3 - a$ deelbaar door 24. Bewijs dat.
6. De som van twee getallen is 3432 en hun G. G. D. is 429. Welke kunnen die getallen zijn?
7. Iemand kocht een stuk laken tegen 5 gld. per M. Hij was later genoodzaakt het tegen 4 gld. per M. te verkoopen, waardoor hij toch maar 16 % verloor, omdat het stuk 4 M. langer was, dan hem berekend werd. Hoe lang was dat stuk?
8. Iemand koopt een partij graan. Van deze partij verkoopt hij 200 HL tegen 9,765 gld. den HL, en wint daarop $8\frac{1}{2}$ %. De rest verkoopt hij met een verlies van 5 %. Zoo hij nu in het geheel 31,5 gld. verliest, hoe groot is dan de geheele partij geweest?
9. Bij het bepalen van den G. G. D. van a en b heeft men gevonden:

```
a ) b ( 1
    ____
      )____ ( 2
           )____ ( 3
             36 )     ( 5
```

   Welke zijn de getallen a en b?
10. Twee kapitalen groot 400 gld. en 600 gld. zijn tegen hetzelfde percent 's jaars uitgezet. Het eerste brengt in zekeren tijd 8 gld.

Digitized by Google

rente op, en het tweede, dat 3 maanden langer uitstaat, 21 gld. Tegen welk % zijn die kapitalen uitgezet?
(Reken eerst uit, hoeveel de interest van het eerste geweest zou zijn, als dit ook 600 gld. groot was).

11. A leent aan B 500 gld. tegen 4 % 's jaars. Na eenige maanden geeft B hem het geld met den interest terug, en nu leent A die 500 gld. onmiddellijk aan C tegen $4\frac{1}{2}$ %. Als A zoodoende op het einde van het jaar 21,875 gld. aan rente ontvangen heeft, hoe lang heeft A dan het geld aan B geleend?
12. Schrijf onder elkaar al de getallen van twee cijfers, die ge maken kunt met 5 en 7; ook met 3 en 9; ook met 5 en 8. Welke getallen kunt ge maken met 4, 5 en 7, die op de plaats der honderdtallen 4 hebben; welke, die 5 tot honderdtallen hebben, en welke die 7 tot honderdtallen hebben?
Hoeveel getallen van drie cijfers kunt ge maken met 4, 5 en 7?
13. Schrijf alle getallen van drie cijfers op, die ge maken kunt met 7, 9 en 6. Hoeveel maal komt ieder cijfer in de rij der eenheden voor; hoeveel maal in de rij der tientallen, en hoeveel maal in de rij der honderdtallen?
14. Een jongen heeft alle getallen van drie cijfers, die te maken zijn met 9, 8 en 7, onder elkaar gezet. Hoe groot is de som van de cijfers der eenheden, der tientallen, der honderdtallen? Hoe groot is dan de som van alle getallen?
15. Schrijf alle getallen van vier cijfers onder elkaar, die gemaakt kunnen worden met de cijfers 4, 7, 5 en 6. Hoeveel getallen zijn dit, en hoeveel malen komt ieder cijfer in elke rij voor?
16. Bepaal de som van alle getallen van vier cijfers, die gemaakt kunnen worden met de cijfers 5, 8, 3 en 9.
17. Verklaar, waarom de som der getallen van vier cijfers, die men met de cijfers 1, 2, 3 en 5 maken kan, deelbaar is door 66.
18. Welken hoek maken de wijzers van een uurwerk om half twee, half acht, half drie, kwart na een, kwart na vier, kwart voor zeven, kwart voor negen?
19. In hoeveel tijd haalt de groote wijzer den kleinen één minuut in? In hoeveel tijd 5 minuten, 15 minuten, 60 minuten?
20. Hoe ver staan om vier uur de wijzers van elkaar? Hoeveel minuten moet de groote wijzer afleggen om slechts 15 minuten achter den kleinen te staan? Hoeveel minuten om juist boven den kleinen te staan?

Digitized by Google

KLEINSTE GEMEENE VEELVOUD.

83. Het getal 80 is deelbaar door 8, door 5, door 10 en door 40. Men noemt nu 80 **een gemeen veelvoud** van 8, 5, 10 en 40.

Bepaling. *Het kleinste getal, dat door eenige getallen deelbaar is, noemt men* **het kleinste gemeene veelvoud** *van die getallen.*

84. Eigenschap. Het K. G. V. van eenige getallen is gelijk aan het produkt van de ondeelbare factoren, die in die getallen voorkomen, ieder met den grootsten exponent, dien hij in een der getallen heeft.

Bewijs.

Nemen wij de getallen 360, 756 en 2475.

Ontbinden wij elk in factoren, dan verkrijgen wij:

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5$$
$$756 = 2^2 . 3^3 . 7$$
$$2475 = 3^2 . 5^2 . 11.$$

Elk gemeen veelvoud van deze getallen moet volgens § 73 alle factoren bevatten, die in deze getallen voorkomen, dus de factoren 2, 3, 5, 7 en 11, en wel met geen lageren exponent dan in een dezer getallen.

Derhalve moet de factor 2 minstens 3 tot exponent hebben (waarom?), de factor 3 minstens 3 (waarom?), de factor 5 minstens 2, en de factoren 7 en 11 moeten minstens 1 tot exponent hebben.

Het K. G. V. is daarom $2^3 . 3^3 . 5^2 . 7 . 11$.

Opmerkingen. 1. Als men elk van de getallen

$$2^3 . 3^2 . 5 - 2^2 . 3^3 . 5 . 7 - 2^2 . 5^2 . 11$$

door een gemeenschappelijken factor deelt, b.v. door 2, dan wordt het K. G. V. er ook door gedeeld; want nu behoeft dit niet meer 3, doch slechts 2 factoren 2 te bevatten, terwijl de andere factoren evenveel malen moeten voorkomen als eerst.

Deelt men elk van de getallen door 10 of 2×5, dan zal om dezelfde reden het K. G. V. ook door 10 gedeeld worden.

2. Hiervan make men gebruik, als men van eenige getallen, die een factor gemeen hebben, het K. G. V. moet bepalen.

Zijn gegeven: 3600, 2400, 7200 en 10800. Elk der getallen is deelbaar door 100; laat men dien factor weg, dan verkrijgt men:

36, 24, 72, 108.

Digitized by Google

Als men hiervan het K. G. V. wil bepalen, kan men nog de getallen 36 en 24 buiten beschouwing laten; want elk getal, dat door 72 deelbaar is, zal ook door 36 en 24 deelbaar zijn. Nu is het K. G. V. van 72 en 108 gelijk aan 216, dan is het van de gegeven getallen 100×216 of 21600.

3. Van twee onderling ondeelbare getallen, zooals 13 en 27 of 15 en 26, is het K. G. V. gelijk aan hun produkt: 13×27 en 15×26.

85. Eigenschap. Het K. G. V. van twee getallen is gelijk aan hun produkt, gedeeld door hun G. G. D.

Bewijs.

Noemen wij de getallen A en B en stellen wij hun G. G. D. door C voor, dan zijn A en B ieder deelbaar door C. Deelt men ieder getal door C, dan zijn de quotienten onderling ondeelbaar. Noemen wij die quotienten m en n, dan is:

$$A = m \times C \text{ en } B = n \times C.$$

Omdat m en n onderling ondeelbaar zijn, is het K. G. V. van m en n gelijk aan $m \times n$, derhalve dat van A en B gelijk aan $m \times n \times C$.

Nu is:

$$\frac{\text{Produkt}}{\text{G. G. D.}} = \frac{(m \times C) \times (n \times C)}{C} = m \times n \times C, \text{ d. i. het K. G. V.}$$

Van deze eigenschap kan men gebruik maken om van twee getallen, die moeilijk te ontbinden zijn het K. G. V. te bepalen.

Zijn gegeven 428571 en 571428, dan deelen wij eerst het tweede getal door 4 (§ 81), en zoeken den G. G. D. van 428571 en 571428 : 4 of 142857:

$$\begin{array}{r|l} 142857 & 428571 \;(\; 3 \\ & \underline{428571} \\ & 0 \end{array}$$

De G. G. D. van 428571 en 571428 is 142857, hun K. G. V. derhalve:

$$\frac{428571 \times 571428}{142857} = 3 \times 571428 = 1714284.$$

Opgaven.

1. Als a, b, c en d ondeelbare getallen zijn, wat is dan het K. G. V. van:
   a^3b^2c en $a^2b^5c^3d$; $a^2b^3cd^2$ en $a^3bc^2d^4$; a^2b, ab^2, abc en ab^2c^3; a^3bc^2, a^2b^3c, ab^2c^3 en a^2bc^4; a^2bc^3d, $ab^2c^5d^3$, $a^5b^4c^3d^2$, $a^4b^7c^8d^5$ en $a^3b^{10}c^3d^4$.
2. Ook van $18a^3b^2c^4$, $45a^2b^3c^2$, $72a^2b^3c$ en $120abc^4$; $24a^2b^3c$, $60a^2bc^4$, $36a^3b^2cd^2$ en $72a^2c^3d^4$.

Digitized by Google

3. Zoek het K. G. V. van: 5244 en 7866; 2085 en 3465.
4. Van twee getallen is het K. G. V. 840 en de G. G. D. 24. Welke kunnen die twee getallen zijn?
5. Om hoe laat maken na één uur de beide wijzers voor het eerst een hoek van 60 graden?
6. Iemand trekt van een kapitaal 400 gld. rente per jaar. Had hij het tegen $\frac{1}{2}$ % 's jaars hooger uitgezet, dan zou hij jaarlijks 450 gld. rente genieten. Tegen welk percent staat het kapitaal uit?
7. Iemand trekt van een kapitaal in een jaar 900 gld. rente. Had hij het tegen $\frac{1}{8}$ % per maand hooger uitgezet, dan zou hij in een half jaar 600 gld. rente getrokken hebben. Hoe groot is dat kapitaal en tegen welk percent staat het uit?
8. A kan zeker werk afmaken in 10 dagen; helpt B hem iederen dag een halven dag, dan is het in 6 dagen klaar. In hoeveel dagen kan B het afmaken?
9. Jan had tweemaal zooveel centen als Piet; Jan won 10 centen van Piet en had er toen vijfmaal zooveel als Piet. Hoeveel centen had ieder?
10. Welke deelers hebben de getallen 120, 144 en 168 gemeen?
11. B. verkoopt van een partij goederen het $\frac{3}{4}$ deel met 24 % winst en de rest met 8 % verlies. Als hij nu 580 gld. ontvangt, hoe groot is dan de inkoop?
12. A en B leenen ieder voor $4\frac{1}{2}$ maand zekere som, samen groot 15000 gld. A moet 4% en B $4\frac{1}{2}$ % 's jaars betalen. Wat leent ieder, als ze samen 236,25 gld. aan rente betalen?
13. Twee kapitalen, die 2000 gld. verschillen staan op interest uit; het grootste à $4\frac{1}{2}$ %, het kleinste à 4 %. Na verloop van een jaar zijn de kapitalen met de interesten samen 15642,50 gld. Hoe groot zijn de kapitalen?
14. Vermenigvuldig 3546 met 206, als die getallen in het zeventallig stellig stelsel staan. Voer de bewerking in dat talstelsel uit.
15. Een arbeider verdient 7 gld. per week en den kost, doch hij moet 5 gld. per week kostgeld betalen, als hij niet werkt. Na 40 weken ontvangt hij 208 gulden. Hoeveel weken heeft hij gewerkt?

Digitized by Google

BREUKEN.

86. Als men elke eenheid, waaruit een hoeveelheid appels bestaat, in vier gelijke deelen verdeelt, en een zeker aantal van die deelen neemt, ontstaat een nieuwe hoeveelheid, waarvan elk deel een nieuwe eenheid is. Vier van die nieuwe eenheden vormen de oorspronkelijke eenheid of **het geheel**; de nieuwe eenheid draagt den naam van **breukeenheid.** De breukeenheid, waarvan er vier in de oorspronkelijke eenheid of in het geheel gaan, heet **een vierde** en wordt voorgesteld door $\frac{1}{4}$.

Andere breukeenheden zijn: een tweede of een half $\left(\frac{1}{2}\right)$; een derde $\left(\frac{1}{3}\right)$; een vijfde $\left(\frac{1}{5}\right)$; een tiende $\left(\frac{1}{10}\right)$; een twintigste $\left(\frac{1}{20}\right)$.

Bestaat een hoeveelheid uit 23 vierde guldens, dan wil dit zeggen, dat die hoeveelheid bestaat uit 23 breukeenheden, waarvan er 4 de eenheid „gulden" vormen. Zulk een hoeveelheid heet **een gebroken hoeveelheid**; de uitkomst der telling levert **het gebroken getal** $\frac{23}{4}$ op.

87. Bepalingen. Breukeenheden *en* **gebroken getallen** *noemt men* **breuken.**

$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{14}{9}$; $\frac{23}{5}$ zijn breuken.

Het cijfer boven de streep heet **teller** *en wijst het aantal breukeenheden aan, waaruit de gebroken hoeveelheid bestaat.*

Het cijfer onder de streep heet **noemer** *en wijst aan hoevcel breukeenheden in de geheele eenheid begrepen zijn.*

Hieruit volgt, dat breuken zooals $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{18}{18}$ ieder een geheele

Digitized by Google

eenheid voorstellen, en dat de breuken $\frac{15}{5}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{27}{9}$ ieder drie geheele eenheden voorstellen.

Immers de teller van $\frac{15}{5}$ wijst aan, dat men 15 breukeenheden heeft, waarvan er 5 de geheele eenheid vormen, en daar men 3×5 breukeenheden heeft, zoo heeft men ook 3 geheele eenheden.

Omgekeerd kan men b.v. 5 geheele eenheden door een breuk voorstellen, waarvan 6 de noemer is.

Een geheele eenheid bevat 6 breukeenheden, ieder gelijk aan $\frac{1}{6}$; 5 geheele eenheden bevatten dus 5×6 of 30 breukeenheden, waarvan er 6 de eenheid vormen, en wordt daarom geschreven als $\frac{30}{6}$.

Van de breuk $\frac{23}{4}$ kan men zeggen, dat zij bestaat uit 5 geheele eenheden en 3 breukeenheden, waarvan er 4 de geheele eenheid vormen. Men schrijft daarom $\frac{23}{4} = 5 + \frac{3}{4}$ of kortweg $5\frac{3}{4}$.

Zulk een vorm heet een **gemengd getal.**

Elk gemengd getal kan geschreven worden als een breuk. Zoo bestaat b.v. $7\frac{2}{3}$ uit 7 geheele eenheden + 2 breukeenheden, waarvan er drie de geheele eenheid vormen; dus is $7\frac{2}{3} = 7 \times 3 + 2$ of 23 breukeenheden, elk gelijk aan $\frac{1}{3}$, dat is $\frac{23}{3}$.

88. **Bepalingen.** *Breuken, waarvan de teller kleiner is dan de noemer, heeten* **echte breuken**: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{9}$.

Breuken, waarvan de teller grooter is dan de noemer, heeten **onechte breuken**: $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{40}{8}$.

Breuken, waarvan de teller gelijk is aan of een veelvoud is van den noemer, heeten **oneigenlijke breuken**: $\frac{5}{5}$, $\frac{42}{7}$, $\frac{30}{6}$.

Opgaven.

1. Als a en b geheele getallen voorstellen, wat is dan de beteekenis van:

Digitized by Google

$$\frac{1}{a};\ \frac{5}{a};\ \frac{1}{b};\ \frac{3}{b};\ \frac{a}{b};\ \frac{5}{2a};\ \frac{3a}{7b}?$$

2. Schrijf 5, 3, 7, a, $2a$, b, $3ab$ als breuken met den noemer 4. Ook als breuken met den noemer p.
3. Schrijf als een breuk:

$$1+\frac{5}{a}=\frac{\ }{a};\quad 3+\frac{4}{a}=\frac{\ }{a};\quad a+\frac{5}{a}=\frac{\ }{a};\quad a+\frac{a}{b}=\frac{\ }{b};$$

$$4a+\frac{5b}{c}=\frac{\ }{c};\quad m+\frac{n}{p}=\frac{\ }{p}.$$

4. Welke breukeenheid is grooter $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$ of $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{8}$ of $\frac{1}{12}$?

   Voltooi: Een breukeenheid is kleiner, naarmate ...
5. Hoeveel moet men bij elk der volgende breuken voegen om een geheele eenheid te verkrijgen:

$$\frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{7};\ \frac{9}{10};\ \frac{5}{a};\ \frac{11}{ab}?$$

6. Wat is meer $\frac{3}{4}$ of $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$ of $\frac{7}{8}$; $\frac{27}{28}$ of $\frac{35}{36}$; $\frac{a-1}{a}$ of $\frac{3a-1}{3a}$?
7. Hoe laat is het, als voor het eerst na drie uur de beide wijzers een rechten hoek vormen?
8. De afstand van twee plaatsen A en B bedraagt $55\frac{1}{2}$ KM. Uit A vertrekt een bode met een snelheid van $5\frac{1}{2}$ KM. per uur. Een uur na zijn vertrek komt hem een bode uit B te gemoet, die bij de ontmoeting $10\frac{1}{2}$ KM. minder afgelegd heeft dan de bode uit A. Hoeveel KM. legt de tweede bode per uur af?
9. Wanneer vormen voor het eerst na drie uur de wijzers een gestrekten hoek?
10. A, B en C kunnen samen een werk afmaken in 5 dagen. Als A en B er samen 3 dagen aan werken, kan C de rest doen in 11 dagen. In hoeveel dagen kan C alleen het geheele werk afdoen?
11. Een koopman koopt suiker en rijst samen voor 88 gld. De suiker kost 60 ct. en de rijst 20 ct. per KG. Als hij 40 KG meer suiker dan rijst koopt, bepaal dan, hoeveel KG hij van elk koopt.
12. Een uurwerk, dat 15 minuten per etmaal achterloopt, wordt 's morgens om 8 uur gelijk gezet. Hoe laat is het, als dat uurwerk 's middags 6 uur aanwijst?

Digitized by Google

89. In het voorgaande hebben wij gezegd, dat $\frac{3}{4}$ gelijk is aan 3 breukeenheden, waarvan er 4 de geheele eenheid vormen. Men kan echter $\frac{3}{4}$ ook beschouwen als het 4de deel van 3 geheelen. Immers 3 geheelen bevatten 12 vierden, en het vierde deel van 12 vierden is 3 vierden of $\frac{3}{4}$.

Evenzoo is $\frac{5}{8}$ gelijk aan 5 breukeenheden, waarvan er 8 de geheele eenheid vormen, en ook gelijk aan het 8ste deel van 5 geheele eenheden.

Volgens deze laatste beteekenis kunnen wij nu de deeling van alle geheele getallen verrichten zonder resten te verkrijgen.

Zoo is $23 : 5 =$ het vijfde deel van 23, dus $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$;

$p : 9 =$ het negende deel van p, dus $\frac{p}{9}$;

$a : b =$ het b^{de} deel van a, dus $\frac{a}{b}$.

De breukstreep heeft dus ook de beteekenis van het deelteeken.

90. Eigenschap. Een breuk verandert niet van waarde, als men teller en noemer met een zelfde getal vermenigvuldigt.

Te bewijzen: $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

Bewijs.

$\frac{3}{4}$ beteekent het 4de deel van 3 geheelen.

3 geheelen zijn 3×20 twintigsten, het vierde deel hiervan is $(3 \times 20 : 4)$ twintigsten $= 3 \times 5$ of 15 twintigsten, dus $\frac{15}{20}$.

$\frac{a}{b}$ beteekent het b^{de} deel van a geheelen.

a geheelen bevatten $a \times bn$ breukeenheden, waarvan er bn in de geheele eenheid gaan. Het b^{de} deel van $a \times bn$ van die breukeenheden is $(a \times bn : b)$ breukeenheden, dat is an van die breukeenheden en daarom $\frac{an}{bn}$.

Digitized by Google

Vraag. Welke eigenschap is bij dit bewijs gebruikt?

91. Omgekeerd volgt uit $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$ de:

Eigenschap. Een breuk verandert niet van waarde, als men teller en noemer door een zelfde getal deelt.

92. Bepalingen. *Breuken, die denzelfden noemer hebben, heeten* **gelijknamige breuken.**

Breuken, die niet denzelfden noemer hebben, heeten **ongelijknamige breuken.**

Ongelijknamige breuken kunnen altijd gelijknamig gemaakt worden. Van de breuken $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ en $\frac{7}{8}$ kan men andere maken, die tot noemer hebben het produkt der noemers: $3 \times 5 \times 8$.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 8}{3 \times 5 \times 8} = \frac{80}{120}.$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 8 \times 3}{3 \times 5 \times 8} = \frac{72}{120}; \quad \frac{7}{8} = \frac{3 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 8} = \frac{105}{120}.$$

Het is echter aan te bevelen den noemer zoo klein mogelijk te maken. Daarvoor hebben we slechts het kleinste getal te zoeken, dat door elk der noemers gedeeld kan worden, dus het K. G. V. der noemers.

Zij gevraagd $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{18}$ en $\frac{19}{24}$ gelijknamig te maken.

Het K. G. V. der noemers is 72. Hierop is de eerste noemer 6 keer, de tweede 4 keer en de derde 3 keer begrepen. Vermenigvuldigt men nu teller en noemer der eerste breuk met 6, die der tweede met 4 en die der derde met 3, dan krijgt men:

$$\frac{5}{12} = \frac{6 \times 5}{6 \times 12} = \frac{30}{72}; \quad \frac{13}{18} = \frac{4 \times 13}{4 \times 18} = \frac{52}{72}; \quad \frac{19}{24} = \frac{3 \times 19}{3 \times 24} = \frac{57}{72}.$$

Zij in de tweede plaats gevraagd de breuken $\frac{d}{a^2b}$; $\frac{c}{a^2b^2}$; $\frac{cd}{ab^2}$; $\frac{c^2}{abd}$ gelijknamig te maken.

Het K. G. V. der noemers is a^2b^2d.

Hierop gaat de eerste noemer bd keer, de tweede d keer, de derde ad keer, de vierde ab keer.

Wij krijgen nu:

Digitized by Google

$$\frac{d}{a^2b} = \frac{bd \times d}{bd \times a^2b} = \frac{bd^2}{a^2b^2d};$$
$$\frac{c}{a^2b^2} = \frac{d \times c}{d \times a^2b^2} = \frac{cd}{a^2b^2d};$$
$$\frac{cd}{ab^2} = \frac{ad \times cd}{ad \times ab^2} = \frac{acd^2}{a^2b^2d};$$
$$\frac{c^2}{abd} = \frac{ab \times c^2}{ab \times abd} = \frac{abc^2}{a^2b^2d};$$

93. Deelt men teller en noemer der breuk $\frac{20}{45}$ door den gemeenschappelijken factor 5, dan ontstaat de even groote breuk $\frac{4}{9}$, waarvan teller en noemer kleiner zijn dan van de eerste.

Eveneens kan men uit de breuk $\frac{a^2c}{ab^2}$ de even groote breuk $\frac{ac}{b^2}$ afleiden.

Bepaling. *Men zegt, dat een breuk* **vereenvoudigbaar (verkleinbaar)** *is, als ze gelijk is aan een andere breuk met kleineren teller en kleineren noemer.*

Om een breuk te vereenvoudigen, deelt men teller en noemer door hun G. G. D.

Voorbeelden.

1. $\frac{192}{216}$. De G. G. D. van 192 en 216 is 24; deelt men teller en noemer door 24, dan ontstaat de even groote breuk $\frac{8}{9}$.

Men noemt nu $\frac{8}{9}$ **de eenvoudigste gedaante** van $\frac{192}{216}$.

2. $\frac{a^2b^3c^4}{a^5bc^5}$. De G. G. D. van teller en noemer is a^2bc^4; deelt men teller en noemer er door, dan ontstaat de even groote breuk $\frac{b^2}{a^3c}$.

Opgaven.

1. Vereenvoudig de volgende breuken:
$\frac{5a}{10b}$; $\frac{20ab}{35a^2}$; $\frac{4a^2}{12a^3}$; $\frac{15a^2b}{40a^2b^2}$; $\frac{a^2b}{a^2b^2}$; $\frac{ab^3c}{a^2bc^3}$; $\frac{12a^2bc^3}{18a^3b^2c^4}$; $\frac{25a^3b^4c^2}{75a^2b^5c^3}$; $\frac{120a^5b^3c^4d}{144a^4b^5c^3d^2}$.

Digitized by Google

2. Vul in: $\frac{5}{a} = \frac{}{7a}$; $\frac{3}{a} = \frac{}{ab}$; $\frac{5a}{bc} = \frac{}{b^2c^3}$.

3. Maak gelijknamig: $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$; $\frac{5}{a}$ en $\frac{2}{ab}$; $\frac{4a}{b}$ en $\frac{3b}{a}$; $\frac{5a}{b^2}$ en $\frac{2}{bc}$; $\frac{ab}{c^3}$ en $\frac{a^2}{bc}$; $\frac{a^2}{b^3c}$ en $\frac{ab}{ac^3}$; $\frac{abc}{d^4}$ en $\frac{b^3}{acd^2}$; $\frac{a^2}{bc^2d}$ en $\frac{b^2}{a^2cd^2}$.

4. Hoeveel is het 5de deel van a; het a^{de} deel van 12; het p^{de} deel van $3a$; het m^{de} deel van n; het ab^{de} deel van $3a^2$; het a^2b^{de} deel van $5ab^2$?

5. Als men den teller der breuk $\frac{a}{b}$ met 7 vermenigvuldigt, hoeveel moet men dan bij den noemer voegen, opdat de waarde der breuk onveranderd blijft?

6. Van een breuk heeft men den teller met 9 vermenigvuldigd en den noemer met 72 vermeerderd, waardoor de breuk niet van waarde veranderd is. Welke is die breuk, als de som van teller en noemer 15 is?

7. Als teller en noemer eener breuk uit evenveel cijfers bestaan, dan verandert de breuk niet van waarde, wanneer men achter den teller eenige malen den teller en achter den noemer evenveel malen den noemer voegt. Bewijs dit.

$$\frac{57}{83} = \frac{57575757}{83838383}; \quad \frac{236}{315} = \frac{236236236}{315315315}.$$

8. Wat is meer $\frac{2}{15}$ of $\frac{2}{17}$; $\frac{13}{24}$ of $\frac{13}{27}$; $\frac{a-5}{a}$ of $\frac{a-5}{2a}$?

9. Wat moet men bij $\frac{3}{7}$ doen om een geheel te krijgen? Wat bij $\frac{5}{9}$. Waar moet het meeste bij?

10. Welke breuk is de grootste $\frac{3}{5}$ of $\frac{5}{7}$; $\frac{9}{13}$ of $\frac{13}{17}$; $\frac{a-5}{a}$ of $\frac{2a-5}{2a}$?

11. Schrijf alle echte breuken op, die vereenvoudigbaar zijn en 120 tot noemer hebben.

12. Vereenvoudig: $\frac{74}{111}$; $\frac{185}{999}$; $\frac{142857}{999999}$; $\frac{285714}{714285}$; $\frac{428571}{271428}$.

13. Iemand verkoopt een partij goed met 25 % winst. Was de inkoop 200 gld. hooger geweest, dan zou hij maar $4\frac{1}{6}$ % gewonnen hebben. Bereken den inkoop.

14. Iemand wint 20 % van den verkoop. Was deze 300 gld. hooger

Digitized by Google

geweest, dan zou hij 50 % van den inkoop gewonnen hebben; hoe hoog is de inkoop?

15. Een koopman kocht waren à 50 ct. per KG onder voorwaarde, dat hij 10 % overwicht zou ontvangen. Alles wat hij ontving, verkocht hij voor 60 ct. per KG, waardoor hij 56 gld. won. Hoeveel KG had hij ontvangen?

Samentelling en Aftrekking.

94. $\frac{7}{18}+\frac{5}{18}+\frac{13}{18}$ is de som van 7, 5 en 13 breukeenheden, waarvan er 18 in de eenheid gaan. Die som is daarom 25 van die breukeenheden en dus $\frac{25}{18}=1\frac{7}{18}$.

Evenzoo is $\frac{7}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{14}{12}=1\frac{2}{12}=1\frac{1}{6}$;

$$\frac{a}{b}+\frac{2a}{b}+\frac{3a}{b}=\frac{6a}{b};\quad \frac{a+5}{bc}+\frac{a+8}{bc}=\frac{2a+13}{bc}.$$

Hieruit volgt de

Eigenschap. De som van eenige gelijknamige breuken is een nieuwe breuk, die denzelfden noemer heeft als de eerste en waarvan de teller gelijk is aan de som der tellers.

Zijn de breuken niet gelijknamig, dan make men ze eerst gelijknamig:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{13}{18}=\frac{27}{72}+\frac{30}{72}+\frac{52}{72}=\frac{109}{72}=1\frac{37}{72}.$$

$$\frac{2}{a}+\frac{5}{ab}+\frac{3}{a^2b}=\frac{2ab}{a^2b}+\frac{5a}{a^2b}+\frac{3}{a^2b}=\frac{2ab+5a+3}{a^2b}.$$

Komen er onder de gegeven breuken gemengde getallen voor, zooals in:

$$7\frac{1}{2}+3\frac{3}{5}+\frac{3}{4}+2\frac{7}{10},$$

dan maakt men de breuken weer eerst alle gelijknamig:

$$7\frac{10}{20}+3\frac{12}{20}+\frac{15}{20}+2\frac{14}{20}.$$

De hoeveelheid, door deze som voorgesteld, verandert niet, als men ze splitst in twee groepen, waarvan de eerste groep alle geheele eenheden bevat en de tweede groep alle breukeenheden:

Digitized by Google

$$(7+3+2)+\left(\frac{10}{20}+\frac{12}{20}+\frac{15}{20}+\frac{14}{20}\right)=12\frac{51}{20}=14\frac{11}{20}.$$

95. $\frac{15}{23}-\frac{9}{23}$ is het verschil van 15 breukeenheden, waarvan er 23 in de geheele eenheid gaan, en 9 van die breukeenheden, en daarom gelijk aan 6 van die breukeenheden, of $\frac{6}{23}$.

Evenzoo is:

$$\frac{15}{a}-\frac{7}{a}=\frac{8}{a};\quad \frac{25b}{17a}-\frac{9b}{17a}=\frac{16b}{17a}.$$

Uit het voorgaande volgt de

Eigenschap. Het verschil van twee gelijknamige breuken is weer een breuk met denzelfden noemer en die tot teller heeft het verschil der tellers.

$$1-\frac{4}{5}=\frac{5}{5}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5};\qquad 1-\frac{5}{a}=\frac{a}{a}-\frac{5}{a}=\frac{a-5}{a};$$

$$3-\frac{4}{9}=2\frac{9}{9}-\frac{4}{9}=2\frac{5}{9};\quad 5-\frac{4}{p}=\frac{5p}{p}-\frac{4}{p}=\frac{5p-4}{p}.$$

Zijn de breuken, die afgetrokken moeten worden ongelijknamig, dan worden ze eerst gelijknamig gemaakt:

$$\frac{7}{12}-\frac{3}{8}=\frac{14}{24}-\frac{9}{24}=\frac{5}{25},$$

$$\frac{3}{a}-\frac{5}{ab}=\frac{3b}{ab}-\frac{5}{ab}=\frac{3b-5}{ab}.$$

96. Bij de aftrekking van breuken, die beide of een van beide gemengde getallen zijn, onderscheidt men twee gevallen:

1e de breuk in het aftrektal is grooter dan die in den aftrekker:

$$7\frac{15}{19}-4\frac{8}{19}=(7-4)+\left(\frac{15}{19}-\frac{8}{19}\right)=3\frac{7}{19}.$$

2e de breuk in het aftrektal is kleiner dan die in den aftrekker:

$$5\frac{1}{8}-2\frac{5}{8}=4\frac{9}{8}-2\frac{5}{8}=2\frac{4}{8}=2\frac{1}{2};$$

$$7-3\frac{4}{11}=6\frac{11}{11}-3\frac{4}{11}=3\frac{7}{11}.$$

97. De eigenschappen, die voor sommen en verschillen van geheele getallen bewezen zijn, gaan ook door voor breuken. Wij zullen een der eigenschappen aantoonen, en kiezen daarbij voor het gemak gelijknamige breuken.

Digitized by Google

Het verschil van twee breuken wordt vermeerderd met een derde breuk, door deze te voegen bij het aftrektal.

Te bewijzen: $\left(\frac{13}{14}-\frac{5}{14}\right)+\frac{9}{14}=\left(\frac{13}{14}+\frac{9}{14}\right)-\frac{5}{14}$.

Bewijs.

Het verschil van $\frac{13}{14}$ en $\frac{5}{14}$ is $\frac{13-5}{14}$. Deze uitkomst moet met $\frac{9}{14}$ vermeerderd worden:

$$\frac{13-5}{14}+\frac{9}{14}=\frac{(13-5)+9}{14}.$$

In den teller dezer breuk moet het verschil $13-5$ met 9 vermeerderd worden, hetgeen volgens § 9 geschieden kan door het aftrektal met 9 te vermeerderen. De teller wordt dan $(13+9)-5$ en de breuk:

$$\frac{(13+9)-5}{14}.$$

Deze breuk kan beschouwd worden als de uitkomst van $\frac{13+9}{14}-\frac{5}{14}$, en dit als de uitkomst van:

$$\left(\frac{13}{14}+\frac{9}{14}\right)-\frac{5}{14}.$$

Overzicht van het bewijs.

$$\left(\frac{13}{14}-\frac{5}{14}\right)+\frac{9}{14}=\frac{13-5}{14}+\frac{9}{14}=\frac{(13-5)+9}{14}=\frac{(13+9)-5}{14}=$$
$$=\frac{13+9}{14}-\frac{5}{14}=\left(\frac{13}{14}+\frac{9}{14}\right)-\frac{5}{14}.$$

Opgaven.

Herleid de volgende sommen en verschillen:

1. $\frac{5}{a}+\frac{3}{a}+\frac{7}{a}$; $\frac{5}{8a}+\frac{2}{8a}+\frac{9}{8a}$; $\frac{3a}{5b}+\frac{6a}{5b}+\frac{a}{5b}$.
2. $\frac{9}{b}-\frac{5}{b}$; $\frac{13a}{27b}-\frac{4a}{27b}$; $\frac{5a}{8b}+\frac{7a}{8b}-\frac{a}{8b}$.
3. $\frac{5}{2a}+\frac{3}{4a}+\frac{7}{8a}$; $\frac{9}{25a}+\frac{4}{5a}+\frac{8}{3a}+\frac{7}{15a}$.

Digitized by Google

4. $\frac{2a}{7c}+\frac{a}{4c}$; $\frac{5}{b}-\frac{3}{b}$; $\frac{2a}{5b}+\frac{7a}{4b}$

$\frac{4a}{3b^2c^2}+\frac{5a}{6b^2c}+\frac{3a}{4bc^2}+\frac{a}{bc}$.

5. De som van twee breukeenheden is gelijk aan een breuk, die tot teller heeft de som der noemers en tot noemer het produkt der noemers. Bewijs dit.

Neem de breuken $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$.

6. Bewijs, dat $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=\frac{2(a+b)}{ab}$; $\frac{m}{a}+\frac{m}{b}=\frac{m(a+b)}{ab}$ is.

Kunt ge dit ook in woorden brengen?

7. Het verschil van twee breukeenheden is gelijk aan een breuk, die het verschil der noemers tot teller heeft, en tot noemer het produkt der noemers. Bewijs dit voor $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

8. Bewijs en breng dan in woorden:

$\frac{7}{a}-\frac{7}{b}=\frac{7(b-a)}{ab}$; $\frac{m}{a}-\frac{m}{b}=\frac{m(b-a)}{ab}$.

9. Vul onmiddellijk de uitkomsten in:

$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{7}+\frac{1}{12}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$; $\frac{1}{25}+\frac{1}{15}$.

$\frac{3}{7}+\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}+\frac{5}{6}$; $\frac{4}{7}+\frac{4}{11}$; $\frac{5}{12}+\frac{5}{13}$.

$\frac{1}{12}-\frac{1}{15}$; $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{15}-\frac{1}{25}$; $\frac{1}{6}-\frac{1}{14}$.

$\frac{5}{8}-\frac{5}{9}$; $\frac{4}{11}-\frac{4}{13}$; $\frac{5}{12}-\frac{5}{18}$; $\frac{7}{9}-\frac{7}{16}$.

$\frac{6}{3a}+\frac{6}{4a}$; $\frac{a}{3b}+\frac{a}{7b}$; $\frac{5}{2ab}+\frac{5}{9ab}$; $\frac{a}{4mn}+\frac{a}{11mn}$.

$\frac{4}{a}-\frac{4}{5a}$; $\frac{a}{7b}-\frac{a}{12b}$; $\frac{3a}{4b}-\frac{3a}{20b}$; $\frac{a}{mn}-\frac{a}{4mn}$.

10. Hoeveel maal doorloopt de groote wijzer van een uurwerk den omtrek in twaalf uur? Hoeveel maal doet de kleine wijzer dat in dien tijd? Hoeveel maal zullen in twaalf uur de beide wijzers dan juist boven elkaar staan? Om de hoeveel uur heeft zoo'n bedekking dus plaats?

11. Hoe laat is het, als de beide wijzers elkaar voor het eerst bedekken na 3 uur; na 7 uur; na 10 uur?

12. Om een vierkant stuk land is een sloot van $1\frac{1}{2}$ M. breed. Als

Digitized by Google

iemand langs den buitenkant van de sloot loopt, heeft hij 500 schreden te doen om rondom het land te komen; langs den binnenkant slechts 480. Hoeveel cA is dat land kleiner dan 1 HM²?

Vermenigvuldiging.

A. *De vermenigvuldiger is een geheel getal.*

98. $5 \times \frac{3}{4}$ beteekent 5×3 breukeenheden, waarvan er 4 in de eenheid gaan, dus 15 van die breukeenheden of $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Evenzoo is $7 \times \frac{3}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$; $4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$.

$$4 \times \frac{3}{a} = \frac{12}{a}; \qquad a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Hieruit volgt de

Eigenschap. Een breuk wordt met een geheel getal vermenigvuldigd, door den teller er mee te vermenigvuldigen.

$7 \times \frac{5}{21} = \frac{7 \times 5}{21}$; daar men nu teller en noemer door 7 kan deelen, is de uitkomst gelijk aan: $\frac{5}{21:7} = \frac{5}{3}$.

Evenzoo is:

$$4 \times \frac{5}{12} = \frac{4 \times 5}{12} = \frac{5}{12:4} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

$$6 \times \frac{13}{18} = \frac{6 \times 13}{18} = \frac{13}{18:6} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

$$a \times \frac{5}{ab} = \frac{5a}{ab} = \frac{5}{b}.$$

Hieruit volgt de

Eigenschap. Een breuk wordt met een geheel getal vermenigvuldigd, door den noemer door dat getal te deelen.

Dezen laatsten regel passe men altijd toe als het mogelijk is. Kan hij niet toegepast worden, dan gebruike men den eersten regel.

Men schrijve dus niet:

Digitized by Google

$$4 \times \frac{7}{20} = \frac{28}{20}, \quad \text{maar } 4 \times \frac{7}{20} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5};$$
$$9 \times \frac{17}{36} = \frac{153}{36}, \quad \text{maar } 9 \times \frac{17}{36} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4};$$
$$a \times \frac{5}{ab} = \frac{5a}{ab}, \quad \text{maar } a \times \frac{5}{ab} = \frac{5}{b}.$$

$5 \times 2\frac{3}{8}$ is de som van 5 getallen, ieder bestaande uit 2 geheele eenheden en 3 breukeenheden, en dus gelijk aan 5×2 geheele eenheden $+ 5 \times 3$ breukeenheden $= 10 + \frac{15}{8} = 11\frac{7}{8}$.

Evenzoo is:

$$3 \times 4\frac{2}{5} = 3 \times 4 + 3 \times \frac{2}{5} = 12\frac{6}{5} = 13\frac{1}{5};$$
$$5 \times 3\frac{7}{15} = 5 \times 3 + 5 \times \frac{7}{15} = 15\frac{7}{3} = 17\frac{1}{3};$$
$$8 \times 9\frac{15}{32} = 8 \times 9 + 8 \times \frac{15}{32} = 72\frac{15}{4} = 75\frac{3}{4}.$$

99. Omdat $5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7}$ is, daarom is ook omgekeerd $\frac{3}{7}$ vijfmaal zoo klein als $\frac{15}{7}$; m. a. w. $\frac{3}{7}$ is het vijfde deel van $\frac{15}{7}$.

En uit $5 \times \frac{13}{20} = \frac{13}{4}$ volgt eveneens, dat $\frac{13}{20}$ vijfmaal zoo klein is als $\frac{13}{4}$, dus het vijfde deel is van $\frac{13}{4}$.

Men verkrijgt het vijfde deel eener breuk:

***a*. door den teller door 5 te deelen,**

***b*. door den noemer met 5 te vermenigvuldigen.**

$$\frac{12}{13} : 6 = \frac{2}{13}; \qquad \frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{24};$$
$$\frac{30}{35} : 5 = \frac{6}{35}; \qquad \frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{45};$$
$$\frac{12a}{bc} : 4 = \frac{3a}{bc}; \qquad \frac{a}{bc} : 5 = \frac{a}{5bc}.$$

Opgaven.

1. Wat verkrijgt men, als een breuk met haar noemer vermenigvuldigd wordt?

Digitized by Google

Wat, als een breuk met 5 maal den noemer, 7 maal den noemer, a maal den noemer vermenigvuldigd wordt?

2. Bereken: $5 \times \frac{3}{2a}$; $7 \times \frac{3a}{5b}$; $a \times \frac{2a}{9b}$; $5a \times \frac{3a}{bc}$; $a \times \frac{5}{a}$;
$ab \times \frac{7}{ab}$; $(a+b) \times \frac{12}{a+b}$; $(a-b) \times \frac{c}{a-b}$; $4a \times \frac{8}{a}$;
$3b \times \frac{5a}{b}$; $2ab \times \frac{7}{ab}$; $13ac \times \frac{5b}{ac}$.

Ook: $a^2 \times \frac{9b}{4a^3}$; $ab \times \frac{15a}{7bc}$; $a^2 \times \frac{3a}{4b^3}$; $a^2b \times \frac{5b^2}{7ac^4}$;
$a^2b^3 \times \frac{3pq}{a^4b}$; $(a+b) \times \frac{5ab}{(a+b)c}$; $2a^3b \times \frac{11b}{4a^2c^3}$.

3. Eveneens: $\frac{1}{4} : 5$; $\frac{3}{4} : 5$; $\frac{1}{7} : 8$; $\frac{5}{7} : 8$;
$\frac{13}{8a} : 5$; $\frac{30}{8a} : 5$; $\frac{25}{ab} : 6$; $\frac{25}{ab} : 5$; $\frac{25a}{bc} : 5a$; $\frac{a^2}{b^3} : a$;
$\frac{a^2b}{c^3} : ab$; $\frac{a^3}{c^5} : a^4$; $\frac{a^2}{b^5} : a^3$; $\frac{a^2b}{c^3} : ab^2$; $\frac{a^5}{b^3c^2} : a^4b$;
$\frac{a^3b^4c^2}{pq^5c^4} : a^2b^3c$.

4. Door bij den teller eener breuk 12 op te tellen is die breuk 4 maal zoo groot geworden. Welke is die breuk, als de som van teller en noemer 19 is?
5. Door van den noemer eener breuk 20 af te nemen is de breuk met 5 vermenigvuldigd. Als het verschil tusschen teller en noemer 7 bedraagt, welke is dan die breuk?
6. Als men den teller eener breuk met 20 en den noemer met 28 vermeerdert, verandert de waarde der breuk niet. Welke waarde heeft die breuk?
7. De som van teller en noemer eener breuk is 51. Telt men bij den teller 18 en bij den noemer 84 op, dan verandert de waarde der breuk niet. Welke is die breuk?
8. Iemand geeft in 9 maanden uit, wat hij in 8 maanden verdient. Als hij jaarlijks 200 gld. overhoudt, hoeveel verdient hij dan per jaar?
9. Iemand kocht *vijf*centspostzegels. Had hij voor hetzelfde bedrag *drie*centspostzegels gekocht, dan had hij er 40 meer gekregen. Voor welk bedrag kocht hij?
10. De G. G. D. van twee getallen is 27. Als deze in hun som

Digitized by Google

44 maal en in hun verschil 10 maal begrepen is, hoeveel is dan het produkt dier getallen?

11. A, B en C handelen samen. C brengt 5800 gld. meer in dan A, terwijl A en B samen 7200 gld. inbrengen. Als A $\frac{1}{5}$ van de winst krijgt, hoeveel heeft dan ieder ingelegd?

(Aanwijzing. Hoeveel hebben B en C samen ingelegd, en welk deel van de winst krijgen ze daarvoor?)

12. Langs een zelfden weg wandelen drie personen A, B en C in dezelfde richting. A is 6 KM achter B en $7\frac{1}{2}$ KM achter C. Als B na 4 en C na $4\frac{1}{2}$ uur door A ingehaald wordt, wanneer zal B dan C inhalen?

B. *De vermenigvuldiger is een breuk.*

100. Als 1 meter laken 4 gld. kost, dan kosten

7 meter . . . . 7×4 gld. $= 28$ gld.

5 meter . . . . 5×4 gld. $= 20$ gld.

Wil men echter weten, wat $\frac{3}{5}$ meter kost, dan rekent men eerst uit, wat $\frac{1}{5}$ meter kost, en daarna wat $\frac{3}{5}$ meter kost.

1 meter kost . . . . 4 gld.

$\frac{1}{5}$ meter kost het 5de deel van wat 1 meter kost, dus het 5de deel van 4 gld., dat is $\frac{4}{5}$ gld.

$\frac{3}{5}$ meter kost $3 \times \frac{4}{5}$ gld. $= \frac{12}{5}$ gld. $= 2\frac{2}{5}$ gld.

Bepaling. *Een getal met* $\frac{3}{5}$ *vermenigvuldigen beteekent: het getal door* 5 *deelen en de uitkomst met* 3 *vermenigvuldigen.*

Hoe wordt nu een getal vermenigvuldigd met $\frac{5}{6}$, met $\frac{3}{8}$, met $\frac{2}{a}$, met $\frac{a}{b}$?

Voorbeelden.

$\frac{3}{5} \times 7 = 3 \times$ het 5de deel van $7 = 3 \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{5}$;

$\frac{4}{9} \times 11 = 4 \times$ het 9de deel van $11 = 4 \times \frac{11}{9} = \frac{4 \times 11}{9}$;

$\frac{2}{a} \times 7 = 2 \times$ het a^{de} deel van $7 = 2 \times \frac{7}{a} = \frac{2 \times 7}{a}$.

Digitized by Google

Hieruit blijkt dus, dat men een geheel getal met een breuk kan vermenigvuldigen, door dat getal met den teller te vermenigvuldigen en die uitkomst te deelen door den noemer. Men vergete hierbij nooit de breuk te vereenvoudigen. Zoo is:

$\frac{3}{8} \times 12 = \frac{3 \times 12}{8} = \frac{3 \times 3}{2}$, waarbij teller en noemer van $\frac{3 \times 12}{8}$ door 4 gedeeld zijn.

Men had die vereenvoudiging ook vóór de vermenigvuldiging kunnen verrichten:

$$\frac{3}{8} \times 12 = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Evenzoo is:

$$\frac{5}{6} \times 15 = \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2};$$

$$\frac{7}{12} \times 18 = \frac{7}{2} \times 3 = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.$$

101. Onder het produkt $\frac{3}{5} \times \frac{7}{5}$ verstaat men volgens de bepaling in § 100 **driemaal het 5de deel van** $\frac{7}{8}$.

Nu is het 5de deel van $\frac{7}{8}$ gelijk aan $\frac{7}{5 \times 8}$ (zie § 99, *b*), en deze uitkomst driemaal genomen levert op: $\frac{3 \times 7}{5 \times 8}$.

Derhalve is $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{5 \times 8}$.

Op dezelfde wijze verklaart men:

$$\frac{3}{4} \times \frac{a}{b} = \frac{3a}{4b}; \quad \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

Uit het voorgaande volgt:

Het produkt van twee breuken is gelijk aan een nieuwe breuk, die tot teller heeft het produkt der tellers en tot noemer het produkt der noemers.

Men vergete niet te vereenvoudigen en wel liefst voor men tot vermenigvuldiging overgaat.

Men schrijve dus niet:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{3 \times 5}{4 \times 9} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12},$$

Digitized by Google

maar:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{12}.$$

Andere voorbeelden.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{7}{8} \times \frac{12}{35} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \\ \frac{15}{22} \times \frac{33}{40} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{16} \\ \frac{a^2}{bc} \times \frac{b^2}{ac} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c^2} \\ \frac{a^3}{b^2c} \times \frac{b^2}{a^2c} = \frac{a}{c} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{c^2} \end{array}\right\} \text{Hoe is hier vereenvoudigd?}$$

Zijn de breuken, die vermenigvuldigd moeten worden, beide of een van beide gemengde getallen, dan make men van die gemengde getallen eerst onechte breuken.

Voorbeelden.

$$\frac{5}{6} \times 2\frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{8}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9};$$

$$7\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{5} = \frac{15}{2} \times \frac{18}{5} = 3 \times 9 = 27;$$

$$\frac{a}{b} \times \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{a+b}{a} = \frac{a+b}{b}.$$

Opgave. Herleid: $\frac{5}{13} \times \frac{4a}{25b}$; $\frac{3a}{4b} \times \frac{8b}{7a^2}$; $\frac{ab}{c} \times \frac{3c}{5ab^2}$;

$\frac{a^2}{b^3} \times \frac{ab}{c^2}$; $\frac{ab}{c^2} \times \frac{c^3}{4ab}$; $\frac{a^2b}{c^3} \times \frac{ac}{b^2}$; $\frac{2ab}{3c^2} \times \frac{5c^3}{4a^2b^2}$; $\frac{a^3b^2c^2}{x^2y^3} \times \frac{ax^4y}{b^3c^4}$;

$\frac{(a+b)pq}{c^3d^4} \times \frac{c^2dp}{(a+b)^2p^3}$; $\frac{x^2y^5z^4}{a^3b^4} \times \frac{a^5bc^3}{x^4y^2z^3}$; $\frac{a^3b}{c^4d} \times \frac{bc^3}{a^5d^2}$.

Gedurige Produkten.

102. Evenals bij de gedurige produkten van geheele getallen, verstaat men onder $\frac{5}{6} \times 1\frac{1}{4} \times 5\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{7}$, dat $2\frac{1}{7}$ eerst met $5\frac{1}{3}$ moet vermenigvuldigd worden, die uitkomst met $1\frac{1}{4}$ en deze laatste

Digitized by Google

eindelijk met $\frac{5}{6}$. Voert men die bewerkingen in de aangegeven volgorde uit, dan krijgt men tot eindvorm:

$$\frac{5 \times 5 \times 16 \times 15}{6 \times 4 \times 3 \times 7} = \frac{5 \times 5 \times 2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{250}{21} = 11\frac{19}{21}.$$

Machten.

103. $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ is gelijk aan $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{3^3}{5^3}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^4$ is gelijk aan $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$.

Uit het voorgaande blijkt de

Eigenschap. Een breuk wordt tot een macht gebracht door teller en noemer van die breuk tot die macht te verheffen.

Moet een gemengd getal tot een macht gebracht worden, dan maakt men van het gemengd getal eerst een onechte breuk.

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{15^2}{2^2} = \frac{225}{4} = 56\frac{1}{4};$$

$$\left(3\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{81} = 12\frac{28}{81}.$$

104. De eigenschappen, die wij bij de vermenigvuldiging van geheele getallen geleerd hebben, gaan ook door voor breuken. Daar zij bij de breuken steeds tot die van geheele getallen teruggebracht worden, zullen wij er eenige aantoonen en de bewijzen der andere aan den leerling overlaten.

Eigenschap. Het produkt van twee breuken verandert niet van waarde, als men de factoren verwisselt.

Te bewijzen: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

Bewijs.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ is gelijk aan $\frac{a \times c}{b \times d}$. Van deze breuk mag men de factoren van teller en noemer verwisselen; men krijgt dan: $\frac{c \times a}{d \times b}$.

Deze laatste breuk kan men beschouwen als de uitkomst van $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

Digitized by Google

Overzicht van het bewijs.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{c \times a}{d \times b} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}.$$

105. Eigenschap. Een produkt van twee breuken verandert niet van waarde, als men het vermenigvuldigtal in deelen splitst, elk dier deelen met den vermenigvuldiger vermenigvuldigt en de komende produkten samenvoegt.

Zij $\frac{13}{a}$ gesplitst in $\frac{5}{a} + \frac{2}{a} + \frac{6}{a}$, dan zullen wij aantoonen, dat

$$\frac{3}{b} \times \frac{13}{a} = \frac{3}{b} \times \frac{5}{a} + \frac{3}{b} \times \frac{2}{a} + \frac{3}{b} \times \frac{6}{a} \text{ is.}$$

Bewijs.

$\frac{3}{b} \times \frac{13}{a} = \frac{3 \times 13}{b \times a}$. Splitst men nu het vermenigvuldigtal 13 uit den teller in $5 + 2 + 6$, dan krijgt men:

$$\frac{3 \times (5 + 2 + 6)}{b \times a} = \frac{3 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 6}{b \times a} \text{ (zie § 18).}$$

Deze uitkomst kan men beschouwen als de som van:

$$\frac{3 \times 5}{b \times a} + \frac{3 \times 2}{b \times a} + \frac{3 \times 6}{b \times a},$$

en dit weer als de uitkomst van:

$$\frac{3}{b} \times \frac{5}{a} + \frac{3}{b} \times \frac{2}{a} + \frac{3}{b} \times \frac{6}{a}.$$

Overzicht van het bewijs.

$$\frac{3}{b} \times \frac{13}{a} = \frac{3 \times 13}{b \times a} = \frac{3 \times (5 + 2 + 6)}{b \times a} =$$

$$= \frac{3 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 6}{b \times a} = \frac{3 \times 5}{b \times a} + \frac{3 \times 2}{b \times a} + \frac{3 \times 6}{b \times a} =$$

$$= \frac{3}{b} \times \frac{5}{a} + \frac{3}{b} \times \frac{2}{a} + \frac{3}{b} \times \frac{6}{a}.$$

Opgaven.

1. Herleid: $\frac{2a}{3bc} \times \frac{3b}{5a} \times \frac{4ac}{7b}$; $\frac{a^2}{b^3} \times \frac{ab^3}{c^4} \times \frac{bc^2}{a}$.
2. $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2$; $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^5$; $\left(\frac{a^3b}{c^4}\right)^3$; $\left(\frac{a^2b^3}{c^4}\right)^5$; $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^4$.

Digitized by Google

3. $\left(\frac{x}{2y}\right)^2 \times \left(\frac{3y}{2x}\right)^2$; $\left(\frac{4a^2}{3b}\right)^3 \times \left(\frac{9b^2}{2a}\right)^3$;
$\left(\frac{a^2b^3}{c^4d}\right)^4 \times \left(\frac{c^3}{ad^2}\right)^3 \times \left(\frac{ad^2}{bc^4}\right)^2$; $\left(\frac{x^2y^3z}{a^2b}\right)^3 \times \left(\frac{a^3bc}{xy^2z^3}\right)^2$.

4. Ook: $x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$; $xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$; $x^2y\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$.
$xy^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$; $pqr\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}\right)$.

5. Herleid ook: $\frac{a}{b} \times \left(\frac{b}{a}+\frac{c}{ab}\right)$; $\frac{a^2}{bc} \times \left(\frac{c}{a}+\frac{b}{ac}\right)$.
$\frac{2a^2}{bc} \times \left(\frac{3b}{4a}+\frac{bc}{4a^3}\right)$; $\frac{x^2}{yz} \times \left(\frac{xz}{y}+\frac{z^2}{x^3}\right)$.

6. Iemand deelde in 1880 het aantal zijner jaren op zijn geboortejaar en kreeg toen 39 tot quotient. In welk jaar was die man geboren?

7. Een breuk verandert niet van waarde, als men den teller met 2 en den noemer met 3 vermindert. Welke is die breuk, als de som van teller en noemer 100 is?

8. Een bak, lang $1\frac{1}{4}$ M, breed $7\frac{1}{2}$ dM en diep $7\frac{1}{5}$ dM is voor $\frac{2}{3}$ gevuld met water. Hoeveel emmers water zijn in dien bak, als 2 emmers 3 DL inhoud hebben?

9. Een vierkant bleekveld wordt 2 M langer en 1 M breeder gemaakt en is nu 32 M² grooter. Hoe lang was het eerst? (Teekenen).

10. A, B en C deelen 300 gld. A moet 45 gld. meer hebben dan B, en B 7 gld. tegen C 3 gld. Hoeveel krijgt ieder?

Deeling.

106. Bepaling. *Onder het* **quotient** *van een breuk en een geheel getal of van twee breuken, verstaat men een derde getal, dat met den deeler vermenigvuldigd, het deeltal oplevert.*

A. *De deeler is een geheel getal.*

In § 99, *a.* zagen we, dat het vijfde deel van een breuk gevonden wordt, door den teller door 5 te deelen of den noemer er mede te vermenigvuldigen.

$$\frac{15}{7} : 5 = \frac{3}{7}, \text{ omdat } 5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} \text{ is;}$$

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}, \text{ omdat } 5 \times \frac{3}{20} = \frac{3}{4} \text{ is.}$$

Digitized by Google

B. *De deeler is een breuk.*

107. Eigenschap. De eenheid, gedeeld door een breuk, is een nieuwe breuk, die men verkrijgt door teller en noemer der eerste te verwisselen.

Te bewijzen: $1 : \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$.

Bewijs.

$\frac{6}{5}$ is het quotient, omdat $\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} = 1$ is.

Bepaling. *Onder* **het omgekeerde** *van een getal verstaat men de eenheid, gedeeld door dat getal.*

Het omgekeerde van 5 is $1:5$ of $\frac{1}{5}$; van 7 is het omgekeerde $1:7 = \frac{1}{7}$; van $\frac{5}{8}$ is het omgekeerde $1 : \frac{5}{8} = \frac{8}{5}$; en van $\frac{a}{b}$ is het $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$. Men krijgt dus het omgekeerde eener breuk door teller en noemer te verwisselen.

108. Eigenschap. Het quotient van twee breuken, of van een geheel getal en een breuk, is gelijk aan het deeltal vermenigvuldigd met het omgekeerde van den deeler.

Te bewijzen: *a.* $\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{8}$,

b. $9 : \frac{4}{5} = \frac{5}{4} \times 9$.

Bewijs.

a. $\frac{7}{3} \times \frac{5}{8}$ is het quotient van $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$, omdat het, met den deeler $\frac{3}{7}$ vermenigvuldigd, het deeltal oplevert:

$$\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{8}.$$

b. Evenzoo is $\frac{5}{4} \times 9$ het quotient van $9 : \frac{4}{5}$, omdat:

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} \times 9 = 9 \text{ (het deeltal) is.}$$

Opmerkingen. 1. Van twee gelijknamige breuken is het quotient gelijk aan het quotient der tellers:

Digitized by Google

$$\frac{ac}{b^2} : \frac{a}{b^2} = c\,; \quad \frac{ac}{b^2} : \frac{ad}{b^2} = \frac{c}{d}.$$

Verklaar dit.

2. **Het quotient van twee breuken is ook gelijk aan het quotient der tellers, gedeeld door dat der noemers.**

$$\frac{ac}{b^2} : \frac{a}{b} = \frac{c}{b},$$

omdat $\frac{ac}{b^2} : \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \times \frac{ac}{b^2} = \frac{c}{b}$ is.

3. **Zijn de getallen, waarvan het quotient bepaald moet worden, beide of een van beide gemengde getallen, dan herleide men die gemengde getallen tot onechte breuken.**

$$3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{5} = \frac{7}{2} : \frac{21}{5} = \frac{5}{21} \times \frac{7}{2} = \frac{5}{6},$$

$$\left(2 + \frac{a}{b}\right) : \frac{ac}{b} = \frac{2b + a}{b} : \frac{ac}{b} = \frac{a + 2b}{ac}.$$

109. De eigenschappen, die bij de deeling van geheele getallen verklaard zijn, gaan ook door voor breuken. Wij zullen er één bewijzen en kiezen daarvoor de volgende:

Het quotient van twee breuken verandert niet van waarde, als men deeltal en deeler met een zelfde getal vermenigvuldigt.

Te bewijzen: $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = 11 \times \frac{3}{5} : 11 \times \frac{4}{7}$.

Bewijs.

$\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$ is gelijk aan $\frac{7}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{4 \times 5} = \frac{11 \times 7 \times 3}{11 \times 4 \times 5} =$

$= \frac{(11 \times 3) \times 7}{5 \times (11 \times 4)}$. En dit is de uitkomst van $\frac{11 \times 3}{5} \times \frac{7}{11 \times 4}$ of van $\frac{11 \times 3}{5} : \frac{11 \times 4}{7}$, of van $11 \times \frac{3}{5} : 11 \times \frac{4}{7}$.

Opgaven.

1. Herleid: $\frac{2a}{b} : a$; $\frac{3ab}{c^2} : b^2$; $\frac{5a}{b^2} : 5b$;

$\frac{2x^2y}{3z^3} : xyz$; $\frac{x^3y^2}{z^4} : 5xz^2$; $\frac{x^3y}{3z^3} : 4x^2y^3$.

Digitized by Google

2. Ook: $\frac{a^2}{bc} : \frac{a}{b}$; $\frac{a^3}{b^2c} : \frac{ac}{b^2}$; $\frac{a^2b^3}{c^4d} : \frac{a^2d^3}{b^2c^3}$;

$xy : \frac{1}{y^2z}$; $x^2y : \frac{y^3}{xz}$; $xy^2 : \frac{y^3}{xz^2}$; $a^2 : \frac{a^2}{b^5}$.

3. Herleid ook nog: $\frac{a^3}{b^4} : \frac{ac}{b^4}$; $\frac{a^2b}{c^3} : \frac{ab^2}{c^3}$;

$\frac{(a+b)^2}{c^3d} : \frac{a+b}{c^3d}$; $(a+b) : \frac{a+b}{c}$; $\frac{a+b}{c+d} : \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$.

4. Waaraan is het quotient van een breuk en haar omgekeerde gelijk?
5. Met welk getal wordt de breuk $\frac{7}{11}$ vermenigvuldigd, als men haar teller en noemer met 4 vermeerdert?
6. Van de breuk $\frac{15}{28}$ wordt de teller met 6 verminderd, waarmee moet men den noemer verminderen, opdat de breuk $2\frac{2}{5}$ maal zoo groot wordt?
7. Deelt men een getal door $\frac{3}{4}$ en het quotient door $1\frac{5}{6}$, dan is de som der quotienten 24. Welk is dit getal?
8. Van welke twee breuken is het quotient $1\frac{1}{5}$ en de som ook $1\frac{1}{5}$?
9. Bepaal de volgende quotienten:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right) : \left(2+\frac{a}{b}\right); \quad \left(\frac{a}{b}+\frac{3a}{2b}\right) \cdot \left(\frac{2a}{3b}+\frac{3a}{2b}\right);$$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right) : \left(1+\frac{a}{b}\right); \quad \left(2+\frac{3a}{b}\right) : \left(3+\frac{2b}{a}\right);$$

$$\left(x+\frac{y}{2}\right) : \left(z+\frac{y}{x}\right); \quad \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) : \left(x+\frac{y^2}{x}\right).$$

10. A kan een werk verrichten in 18 dagen, B in 20 en C in 24. A begint er mee; na 3 dagen komt B hem te hulp en nog 2 dagen later voegt C zich bij hen. In hoeveel dagen komt het werk gereed?
11. Wat verkrijgt men, als men van drie getallen het produkt van het eerste en tweede deelt door het produkt van het eerste en derde getal?
12. Van welke drie getallen is het produkt van het eerste en tweede $7\frac{1}{2}$, dat van het tweede en derde $4\frac{1}{6}$ en het verschil van het eerste en derde getal $1\frac{1}{15}$?

Digitized by Google

SAMENGESTELDE BREUKEN.

110. De breuk $\frac{7}{9}$ heeft, zooals wij in § 89 gezien hebben, tweeërlei beteekenis. Een er van is, dat $\frac{7}{9}$ beteekent het 9de deel van 7. Volgens deze beteekenis staat dus de breukstreep in de plaats van het deelteeken.

Schrijft men de quotienten

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6}; \quad 3\frac{1}{2} : \frac{5}{8}; \quad 4 : \frac{7}{8}; \quad 2\frac{1}{2} : 3; \quad 5\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$$

met behulp van breukstrepen, dan krijgen ze de gedaante:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}; \quad \frac{3\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}; \quad \frac{4}{\frac{7}{8}}; \quad \frac{2\frac{1}{2}}{3}; \quad \frac{5\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}}.$$

Deze vormen noemt men **samengestelde breuken.**

Een **samengestelde breuk** *stelt dus het quotient voor van twee getallen, die beide of een van beide gebroken getallen zijn.*

In tegenstelling met de samengestelde breuken, noemt men de andere gebroken getallen **enkelvoudige breuken.**

111. Om samengestelde breuken tot enkelvoudige te herleiden, kan men twee wegen inslaan:

a. Men kan de samengestelde breuk als een quotient schrijven, en dit berekenen.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{10}.$$

$$\frac{2\frac{1}{2}}{3} = 2\frac{1}{2} : 3 = \frac{5}{2} : 3 = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{7\frac{1}{2}}{3\frac{3}{8}} = 7\frac{1}{2} : 3\frac{3}{8} = \frac{15}{2} : \frac{27}{8} = \frac{8}{27} \times \frac{15}{2} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}.$$

b. Men vermenigvuldige teller en noemer met zoodanig getal, dat de breuken uit teller en noemer verdwijnen.

Digitized by Google

$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{7}}$. Vermenigvuldigt men teller en noemer met 6×7, zijnde het produkt der noemers van $\frac{5}{6}$ en $\frac{2}{7}$, dan krijgt men:

$$\frac{6 \times 7 \times \frac{5}{6}}{6 \times 7 \times \frac{2}{7}} = \frac{7 \times 5}{6 \times 2} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}.$$

$\frac{3\frac{2}{3}}{9\frac{1}{6}}$. Vermenigvuldigt men teller en noemer met 6, dan krijgt men:

$$\frac{6 \times 3\frac{2}{3}}{6 \times 9\frac{1}{6}} = \frac{22}{55} = \frac{2}{5}.$$

Opgaven.

Herleid de volgende samengestelde breuken tot enkelvoudige:

1. $\frac{3\frac{1}{2} + 2\frac{5}{6}}{4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}}$; $\frac{7\frac{1}{3} + 2\frac{3}{5}}{5\frac{5}{6} + 4\frac{1}{5}}$; $\frac{1\frac{1}{2\frac{1}{2}}}{3\frac{3}{4\frac{1}{5}}}$; $\frac{2\frac{3\frac{1}{3}}{2\frac{5}{7}}}{3\frac{2\frac{2}{5}}{3\frac{1}{3}}}$; $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$; $\frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{3}}}$.

2. $\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{1 + \frac{a^2}{b^2}}$; $\frac{a + \frac{2a}{3}}{b + \frac{b}{4}}$; $\frac{2 + \frac{b}{a}}{1 + \frac{2a}{b}}$; $\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c}}{\frac{c}{b} + \frac{b}{a}}$; $\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}{\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}}$;

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c^2}{ab}}{\frac{a^2}{bc} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}}.$$

3. $$\frac{\left(7\frac{3}{4} + 5\frac{\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} - 4\frac{1\frac{2}{3}}{2} + 2\frac{7}{1\frac{1}{2}} - 8\frac{1}{2}\right) \times 7\frac{1}{5}}{\left(9\frac{1}{1\frac{2}{3}} + 7\frac{11}{15} - 3\frac{2\frac{1}{2}}{5} - 10\frac{4\frac{1}{3}}{30}\right) : 2\frac{\frac{2}{5}}{3}}.$$

4. Vul in: $\frac{5\frac{2}{7} - 3\frac{1}{4} \times \frac{5}{1\frac{3}{3}}}{4\frac{7}{8} + 9\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2} \times \ldots$

5. Eveneens: $(2\frac{1}{4} + 3\frac{3}{8} : \frac{9}{16}) \times \frac{2}{11} = \ldots . \times 4\frac{1}{2}$.

Digitized by Google

6. Herleid:

$$\frac{(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})}-\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{5})(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})}+\frac{(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(\frac{1}{4}+\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})}.$$

7. Hoeveel is:

$$\frac{4}{13\frac{3}{4}}\times\frac{4\frac{1}{8}}{2}:\left(\frac{11}{4\frac{1}{8}}-\frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{2}{7}}\right)-\frac{3\frac{1}{8}}{16\frac{2}{8}}+\frac{1}{2}:\frac{1}{8}\,?$$

8. Herleid:

$$\frac{29\frac{1}{6}+12\frac{1}{2}}{29\frac{1}{6}-12\frac{1}{2}}\times(2\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{10}):\frac{7\frac{2\frac{1}{4}}{4\frac{1}{8}}}{4\frac{1}{4}:3\frac{3}{8}}.$$

9. Hoeveel is:

$$7\tfrac{1}{2}+\frac{7\frac{1}{3}-5\frac{1}{5}}{1\frac{7}{8}+2\frac{47}{120}}-\left(5\tfrac{4}{15}+\frac{5+5\frac{1}{5}:8\frac{2}{5}}{7\frac{1}{7}:11\frac{11}{35}+7}\right)?$$

10. Hoeveel HL is:

$$\left(\frac{\frac{1}{3}}{10}+\frac{7\frac{1}{2}}{11}\right):\left(\frac{3\frac{5}{9}}{10}-\frac{5\frac{1}{4}}{39\frac{3}{5}}:6\right):2\tfrac{15}{22}\text{ last ?}$$

11. Vul in:

$$\frac{2\frac{1}{3}+4\frac{5}{6}}{3\frac{3}{8}-1\frac{1}{4}}\times\frac{1\frac{1}{3}+1\frac{3}{5}}{\ldots-1\frac{1}{2}}:\frac{5\frac{1}{6}-4\frac{3}{8}}{2\frac{3}{8}+1\frac{1}{8}}=30\tfrac{1}{10}.$$

12. Bereken:

$$\frac{13\frac{1\frac{5}{9}}{2\frac{1}{3}}+14\frac{8\frac{1}{3}}{10}-\left(8\tfrac{1}{4}-3\frac{4\frac{1}{2}}{12}\right)\times 5\tfrac{1}{3}}{7\frac{1}{2}:1\frac{\frac{2}{3}}{2\frac{2}{3}}-1\frac{1}{15}:\frac{5}{9}}.$$

TIENDEELIGE OF DECIMALE BREUKEN.

112. Bepalingen. Tiendeelige *of* **decimale breuken** *zijn breuken, die tot noemer hebben* 10 *of een macht van* 10.

In tegenstelling met de decimale breuken noemt men de breuken, die geen macht van 10 *tot noemer hebben,* **gewone breuken.**

Zoo zijn $\frac{9}{10}$, $\frac{37}{100}$, $\frac{413}{1000}$ tiendeelige breuken.

In plaats van $\frac{9}{10}$ schrijft men 0,9; in plaats van $\frac{7}{100}$ schrijft men 0,07; in plaats van $\frac{3}{1000}$ schrijft men 0,003.

De eerste nul in deze getallen wijst aan, dat er geen geheele eenheden zijn; de tiende deelen zijn door een komma van de geheelen gescheiden.

De komma heet **decimaalteeken.**

Digitized by Google

Op de eerste plaats achter het decimaalteeken schrijft men de tiende deelen; op de tweede plaats de honderdste deelen; op de derde plaats de duizendste deelen, enz.

Omdat $\frac{37}{100} = \frac{30}{100} + \frac{7}{100} = \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$ is, daarom schrijft men in plaats van $\frac{37}{100}$ de decimale breuk 0,37.

113. Eigenschap. Een tiendeelige breuk wordt vermenigvuldigd met 10, 100, 1000 enz., door het decimaalteeken 1, 2, 3 enz. plaatsen naar rechts te verplaatsen.

Bewijs.

$$10 \times 3{,}578 = 10 \times \frac{3578}{1000} = \frac{3578}{100} = 35{,}78;$$

$$100 \times 0{,}2593 = 100 \times \frac{2593}{10000} = \frac{2593}{100} = 25{,}93.$$

enz.

114. Eigenschap. Een tiendeelige breuk wordt door 10, 100, 1000 enz. gedeeld, door het decimaalteeken 1, 2, 3 enz. plaatsen naar links te verplaatsen.

Bewijs.

$$13{,}47 : 10 = \frac{1347}{100} : 10 = \frac{1347}{1000} = 1{,}347;$$

$$0{,}285 : 100 = \frac{285}{100} : 100 = \frac{285}{10000} = 0{,}0285$$

enz.

Samentelling en Aftrekking.

115. De getallen 7,34, 5,27 en 0,8 worden samengeteld door ze te splitsen in: (4 + 7) honderdste deelen, (3 + 2 + 8) tiende deelen en (7 + 5) eenheden, en leveren dan op 11 honderdste deelen + 13 tiende deelen + 12 eenheden, of 1 honderdste deel + 14 tiende deelen + 12 eenheden, of 1 honderdste deel + 4 tiende deelen + 13 eenheden; d. i. 13,41.

Gemakkelijker schrijft men de getallen onder elkaar zoo, dat de eenheden en gelijknamige breuken onder elkaar staan:

Digitized by Google

7,34
5,27
0,8
13,41.

De aftrekking geschiedt op gelijksoortige wijze. Met eenige voorbeelden zullen wij het opheldéren:

7,59 = 7 eenheden + 5 tiende deelen + 9 honderdste deelen
2,46 = 2 „ + 4 „ „ + 6 „ „
5,13 = 5 eenheden + 1 tiende deelen + 3 honderdste deelen.

9,54 = 9 eenheden + 4 tiende deelen + 14 honderdste deelen
3,28 = 3 „ + 2 „ „ + 8 „ „
6,26 = 6 eenheden + 2 tiende deelen + 6 honderdste deelen.

7,12 = 6 eenheden + 10 tiende deelen + 12 honderdste deelen
3,57 = 3 „ + 5 „ „ + 7 „ „
3,55 = 3 eenheden + 5 tiende deelen + 5 honderdste deelen.

8 = 7 eenheden + 9 tiende deelen + 10 honderdste deelen
4,36 = 4 „ + 3 „ „ + 6 „ „
3,64 = 3 eenheden + 6 tiende deelen + 4 honderdste deelen.

Vermenigvuldiging.

A. *De vermenigvuldiger is een geheel getal.*

116. $7 \times 3{,}58 = 7 \times$ (3 eenheden + 5 tiende deelen + 8 honderdste deelen) = 21 eenheden + 35 tiende deelen + 56 honderdste deelen
= 25 „ + 0 „ „ + 6 „ „

Men kan ook aldus de verklaring geven:

$$7 \times 3{,}58 = 7 \times \frac{358}{100} = \frac{7 \times 358}{100} = \frac{2506}{100} = 25{,}06;$$

$$24 \times 0{,}356 = 24 \times \frac{356}{1000} = \frac{24 \times 356}{1000} = \frac{8544}{1000} = 8{,}544.$$

Men ziet hieruit duidelijk den regel:

Men vermenigvuldigt een decimaal getal met een geheel getal, door het eerste als een geheel getal te beschouwen en in het produkt het decimaalteeken zooveel cijfers naar links te plaatsen, als er in het vermenigvuldigtal cijfers na de komma staan.

B. *De vermenigvuldiger is een decimaal getal.*

Digitized by Google

$$3{,}2 \times 4{,}5 = \frac{32}{10} \times \frac{45}{10} = \frac{32 \times 45}{100} = \frac{1440}{100} = 14{,}40;$$

$$7{,}23 \times 1{,}4 = \frac{723}{100} \times \frac{14}{10} = \frac{723 \times 14}{1000} = \frac{10122}{1000} = 10{,}122;$$

$$5{,}372 \times 0{,}8 = \frac{5372}{1000} \times \frac{8}{10} = \frac{42976}{10000} = 4{,}2976.$$

Twee decimale getallen worden vermenigvuldigd alsof het geheele getallen waren, en in het produkt wordt het decimaalteeken zooveel cijfers naar links geplaatst, als er in vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger samen cijfers na het decimaalteeken staan.

Deeling.

A. *De deeler is een geheel getal.*

117. $35{,}721 : 9 = \frac{35721}{1000} : 9.$

Het 9de deel van 35721 duizendste deelen is 3969 duizendste deelen = 3,969.

Wij deelen dus 35,721 door 9, door het deeltal als een geheel getal te beschouwen en plaatsen in het quotient het decimaalteeken evenveel cijfers naar links, als in het deeltal cijfers na het decimaalteeken staan.

Andere voorbeelden.

a. 3,275 : 4

```
4 ) 3,27500 ( 0,81875
    32
     7
     4
    ---
     35
     32
    ---
      30
      28
     ---
       20
       20
      ---
        0
```

Wij hebben achter het deeltal twee nullen gevoegd om een eindigende decimale breuk tot quotient te bekomen.

Digitized by Google

b. 15,384 : 7.

```
7 ) 15,384000 ( 2,197714
    14
    ---
     13
      7
     ---
      68
      63
     ----
       54
       49
      ----
        50
        49
       ----
         10
          7
        ----
          30
          28
        ----
           2
```

Hoeveel nullen men ook achter het deeltal plaatst, het quotient zal nooit een eindigende decimale breuk worden (zie later § 121).

Neemt men nu tot quotient 2,197 dan is dit te klein, 2,198 daarentegen is te groot.

2,197 verschilt van het ware quotient dus minder dan 0,001. Men zegt daarom, dat 2,197 het **benaderde quotient** van 5,384 : 7 is, **nauwkeurig tot op 0,001.**

Evenzoo is 2,1977 het benaderde quotient van 15,384 : 7, nauwkeurig tot op 0,0001.

B. *De deeler is een decimaal getal.*

118. 1,296 : 3,6.

Wij maken gebruik van de eigenschap:

Een quotient verandert niet van waarde, als men deeler en deeltal met een zelfde getal vermenigvuldigt.

Vermenigvuldigt men deeler en deeltal met 10, dan wordt de deeler een geheel getal en men heeft dan het vorige geval.

$$1{,}296 : 3{,}6 = 12{,}96 : 36 = 0{,}36.$$

Evenzoo is:

$$4{,}464 : 3{,}72 = 446{,}4 : 372 = 1{,}2$$
$$5 : 1{,}25 = 500 : 125 = 4.$$

Ook in dit geval, waar de deeler een tiendeelige breuk is, kan het gebeuren dat het quotient niet-eindigend zal zijn. Men kan dan het quotient benaderen tot op één honderdste, een duizendste enz. nauwkeurig.

Opmerking. Men kan elk geheel getal beschouwen als een decimaal getal met nullen achter het decimaalteeken.

Digitized by Google

$$8 = 8{,}000\,; \qquad 17 = 17{,}000.$$

Daarom kan men het quotient van twee geheele getallen ook als een decimaal getal schrijven.

Voorbeelden.

$8 : 5 = 8{,}0 \ldots : 5 = 1{,}6$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

$5 : 8 = 5{,}000 : 8 = 0{,}625$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$45 : 7 = 45{,}000 \ldots : 7 = 6{,}428$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 4 \end{array}$$

De laatste deeling gaat niet op. Derhalve is 6,428 het benaderde quotient van 45 : 7; nauwkeurig tot op 0,001.

Herleiding van gewone breuken tot tiendeelige.

119. De gewone breuken, welke een macht van tien tot noemer hebben, kunnen geschreven worden als tiendeelige breuken:

$$\frac{32}{10^2} = 0{,}32\,; \quad \frac{6473}{10^3} = 6{,}473\,; \quad \frac{25}{10^4} = 0{,}0025.$$

Het aantal cijfers na het decimaalteeken is gelijk aan den exponent van de macht van tien in den noemer der gewone breuk.

Doch ook andere dan gewone breuken met machten van tien tot noemer kunnen als tiendeelige geschreven worden.

Zoo is $\frac{2}{5} = 0{,}4\,; \quad \frac{3}{4} = 0{,}75.$

120. Eigenschap. Als de noemer eener onverkleinbare gewone breuk uitsluitend factoren 2 en 5 bevat, is de breuk te herleiden tot een eindigende tiendeelige.

Digitized by Google

Bewijs.

Zij $\frac{37}{2^3 . 5}$ de gewone breuk. Om een macht van 10 in den noemer te krijgen, moet men teller en noemer met 5^2 vermenigvuldigen. Men krijgt dan $\frac{37 \times 5^2}{2^3 . 5^3} = \frac{925}{10^3} = 0{,}925$.

Ander Bewijs.

De breuk $\frac{37}{40}$ kan men beschouwen als 37 : 40.

40) 37,000 (0,925
0
370
360
100
80
200
200
0

De deeling van 40 op 37 geeft 0 als cijfer der geheelen. Wij halen een nul aan, m. a. w. deelen 370 tiende deelen door 40. De deeling gaat nog niet op, omdat 370 slechts één factor 2 bevat, terwijl 40 er drie heeft. Weer halen wij een nul aan, of deelen 3700 honderdste deelen door 40, en gaan met het aanhalen van nullen zoo lang door, tot er in het deeltal evenveel factoren 2 zijn als in den deeler. Wij moeten dus 3 nullen aanhalen, en krijgen daardoor in het quotient 3 cijfers na het decimaalteeken.

Opmerking. Het aantal cijfers na het decimaalteeken is gelijk aan den hoogsten der exponenten van 2 of 5 in den noemer der gewone breuk. Waarom ?

121. Eigenschap. Als de noemer eener onverkleinbare gewone breuk niet uitsluitend factoren 2 en 5 bevat, dan is de breuk niet te herleiden tot een eindigende tiendeelige breuk.

Bewijs.

Zij de breuk $\frac{11}{56}$ of $\frac{11}{2^3 . 7}$.

56) 11,000 . . . (0,1964
56
540
504
360
336
240
224
16

De deeling van 56 op 11 geeft 0 als cijfer der geheelen. Wij halen een nul aan, m. a. w. deelen 110 tiende deelen door 56. De deeling gaat niet op, omdat 110 den factor 7 niet bevat, die in den deeler voorkomt. Hoeveel nullen wij ook aanhalen, nooit zal de deeling opgaan, omdat wij in het deeltal wel factoren 2 en 5, maar nooit een factor 7 brengen.

Digitized by Google

122. Uit het voorgaande is gebleken, dat onverkleinbare breuken, waarvan de noemer ook andere factoren dan 2 en 5 bevat, niet te herleiden zijn tot eindigende tiendeelige breuken. Wel kan men tiendeelige breuken opschrijven, die de waarde der gewone breuken tot op één tiende, één honderdste, één duizendste enz. nauwkeurig voorstellen.

Zoo is $\frac{11}{56} = 0{,}1$ nauwkeurig tot op 0,1

$\frac{11}{56} = 0{,}19$ „ „ „ 0,01

$\frac{11}{56} = 0{,}196$ „ „ „ 0,001.

Bij de deeling van 56 op 11 was de eerste rest 11, de tweede 54, de derde 36 enz. De resten zijn alle kleiner dan 56; men kan dus op zijn hoogst 55 verschillende resten verkrijgen. Blijft men de deeling voortzetten, dan zal men dus noodzakelijk een rest terug krijgen, die men vroeger reeds gehad heeft.

Zij b.v. 24 de rest, die het eerst terugkeert, dan zal daarna de rest 16 terugkeeren, daarna 48 enz. De resten keeren dus in dezelfde volgorde terug. Maar dan zullen ook de cijfers van het quotient in dezelfde volgorde terugkeeren.

Voorbeelden.

37) **5**,00 . . . (0,135135

37
130
111
190
185
50
37
130
111
190
185
5

44) 17,00 . . . (0,386363

132
380
352
280
264
160
132
280
264
160
132
28

Zoo zien wij, dat bij de herleiding van $\frac{5}{37}$ de eerste rest 5 na de derde deeling weer terugkeert. Van dat oogenblik af keeren de cijfers 135 uit het quotient ook terug.

Digitized by Google

Bij de herleiding van $\frac{17}{44}$ is 28 de eerste rest die terugkeert, en de wederkeerende cijfers van het quotient zijn 63.

Bepaling. *Een tiendeelige breuk, waarbij van af zeker decimaal de cijfers in dezelfde volgorde terugkeeren, heet* **een repeteerende breuk.**

Uit het voorgaande volgt dus, dat een onverkleinbare gewone breuk, waarvan de noemer niet uitsluitend factoren 2 of 5 bevat, bij deeling van den noemer op den teller een repeteerende breuk oplevert.

De terugkeerende decimalen eener repeteerende breuk vormen **de periode.** Men duidt een repeteerende breuk aan, door een streep te halen door het eerste en het laatste cijfer der periode. Bevat de periode slechts een cijfer, dan haalt men door dat cijfer een streep.

De uitkomsten van bovenstaande deelingen worden dus geschreven:

$$0{,}13\overline{5} \text{ en } 0{,}38\overline{63}.$$

De tiendeelige breuk 6,31854854854... heeft 854 tot periode en wordt geschreven:

$$6{,}31\overline{854}.$$

Bij $1{,}03\overline{5}$ begint de periode onmiddellijk na het decimaalteeken; men noemt haar een **zuiver repeteerende breuk.**

Bij $0{,}38\overline{63}$ begint de periode niet onmiddellijk na het decimaalteeken; men noemt haar **een gemengd repeteerende breuk.**

123. Eigenschap. Als a een getal is, dat geen factoren 2 of 5 bevat, dan zullen er van de produkten $1 \times a$, $2 \times a$, $3 \times a$, ..., $9 \times a$ geen twee hetzelfde cijfer op de plaats der eenheden hebben.

Bewijs.

Wanneer twee produkten b.v. $p \times a$ en $q \times a$ beide b.v. op 5 eindigden, dan zou

$$p \times a = \bullet\ \bullet\ \bullet 5.$$
$$q \times a = \triangle\ \triangle\ \triangle 5 \text{ zijn.}$$

Hun verschil $(p - q) \times a$ zou dus op een nul eindigen en een 10-voud moeten zijn. Nu bevat a geen factoren 2 of 5 en is dus O.O. met 10, derhalve moet dan $p - q$ deelbaar zijn door 10. Dit is echter onmogelijk, daar zoowel p als q kleiner is dan 10.

124. Eigenschap. Wanneer de noemer eener onverkleinbare gewone breuk geen factoren 2 of 5 bevat, is zij te herleiden tot een zuiver repeteerende breuk.

Digitized by Google

Bewijs.

Zij $\frac{3}{7}$ de gewone breuk.

7) 3,0 (0,428	Wij moeten aantoonen, dat 4 het
28	eerste cijfer van het quotient is,
20	dat terugkeert. Dit zal het geval
14	zijn, als 3 de eerste rest is, die
60	terugkeert. Dat 3 de eerste rest
56	is, die terugkeert, toonen wij als
4	volgt aan.

Was 6 de eerste rest, die terugkeert, dan zou de voorgaande aftrekker op een 4 moeten eindigen, daar alle aftrektallen op **nul** eindigen. Alle aftrekkers zijn veelvouden van 7 en blijkens de vorige eigenschap is er onder de produkten $1 \times 7, 2 \times 7, \ldots 9 \times 7$ slechts één, dat op 4 eindigt. Dit is 2×7 of 14. De aftrekker, die de rest 6 veroorzaakt, is dus 14 en het aftrektal $14 + 6$ of 20.

De rest, die aan 6 voorafgaat, is dus 2. Hieruit volgt, dat de rest 6 niet kan terugkeeren voor de rest 2.

En evenzoo toont men aan, dat de rest 2 niet kan terugkeeren voor de rest 3. Derhalve is 3 de rest, die het eerst terugkeert.

De periode in het quotient begint dus bij de 4; m. a. w. het quotient is een zuiver repeteerende breuk.

125. In de paragrafen 113 en 114 hebben wij geleerd, hoe men een tiendeelige breuk kan vermenigvuldigen met of deelen door een macht van 10. De tiendeelige breuken, die wij daar kozen, waren eindigende decimale getallen. Daar repeteerende breuken niet-eindigende decimale getallen zijn, moeten wij nu nagaan, of die zelfde eigenschappen ook voor repeteerende breuken doorgaan.

Zij gevraagd 0,375 te vermenigvuldigen met 100.

Neemt men van de repeteerende breuk slechts één periode en vermenigvuldigt men dan met 100, dan krijgt men:

$$100 \times 0{,}375 = 37{,}5.$$

Neemt men twee perioden en vermenigvuldigt dan met 100, dan krijgt men:

$$100 \times 0{,}375375 = 37{,}5375.$$

Neemt men drie perioden, dan krijgt men:

$$100 \times 0{,}375375375 = 37{,}5375375.$$

Voor vier perioden vindt men: 37,5375375375,

voor vijf perioden vindt men: 37,5375375375375

enz.

Digitized by Google

Hoeveel perioden men ook neemt, steeds komt het decimaalteeken achter het cijfer der honderdste deelen uit de repeteerende breuk te staan.

Neemt men nu een gemengd repeteerende breuk b.v. $0,3\overline{5827}$, die we met 1000 zullen vermenigvuldigen.

$$1000 \times 0,35827 = 358,27$$
$$1000 \times 0,358275827 = 358,275827$$
$$1000 \times 0,3582758275827 = 358,2758275827$$

enz.

Hoeveel malen men de periode in de eindigende decimale breuk die men met 1000 wil vermenigvuldigen, ook neemt, men zal het decimaalteeken steeds drie plaatsen naar rechts moeten verplaatsen.

De eigenschap van § 113 dragen wij nu over op repeteerende breuken en zeggen:

Een repeteerende breuk wordt vermenigvuldigd met een macht van tien, door het decimaalteeken zooveel plaatsen naar rechts te verzetten als de exponent van de macht van tien bedraagt.

Opmerking. Men lette er op dat door zoo'n vermenigvuldiging de periode **kan** veranderen. De leerling bezie goed de volgende voorbeelden:

$$10 \times 0,3\overline{75} = 3,\overline{75}3$$
$$100 \times 0,\overline{48273} = 48,\overline{27348}$$
$$10 \times 0,5\overline{962} = 5,\overline{962}$$
$$100 \times 0,5\overline{962} = 59,\overline{629}$$
$$1000 \times 0,3\overline{84263} = 384,\overline{26384}.$$

Wij zullen nu nagaan, hoe men een zuiver repeteerende breuk kan deelen door een macht van 10; bv. $13,\overline{63427} : 10^3$.

Neemt men de periode één keer, dan krijgt men:

$$13,63427 : 10^3 = 0,01363427.$$

Neemt men de periode twee keer, dan ontstaat:

$$13,6342763427 : 10^3 = 0,0136342763427.$$

Voor drie keer de periode zal men vinden:

$$0,013634276342763427.$$

enz.

Hoe vaak men de periode ook neemt, men verkrijgt steeds tot quotient een getal, waarin het decimaalteeken drie plaatsen naar links verplaatst is en het eerste cijfer der periode dus niet onmiddellijk achter het decimaalteeken staat.

Digitized by Google

De eigenschap van § 114 dragen wij nu ook over op zuiver repeteerende breuken en zeggen daarom:

Men deelt een zuiver repeteerende breuk op dezelfde wijze door een macht van tien als een eindigende decimale breuk, en er ontstaat een gemengd repeteerende breuk met zooveel niet-repeteerende cijfers, als de exponent van de macht van tien bedraagt.

126. Eigenschap. Wanneer de noemer eener onverkleinbare gewone breuk behalve factoren 2 of 5 nog andere factoren bevat, dan is zij te herleiden tot een gemengd repeteerende breuk.

Bewijs.

Zij $\frac{51}{2^3 . 5 . 13}$ de gewone breuk.

Om in den noemer evenveel factoren 2 als 5 te krijgen, vermenigvuldigen wij teller en noemer met 5^2 en krijgen dan:

$$\frac{51 \times 5^2}{2^3 \times 5^3 \times 13} \text{ of } \frac{51 \times 5^2}{13} \times \frac{1}{10^3} \text{ of } \frac{51 \times 5^2}{13} : 10^3.$$

Nu is $\frac{51 \times 5^2}{13}$ een onverkleinbare gewone breuk, waarvan de noemer geen factoren 2 of 5 bevat, dus is zij volgens § 124 te herleiden tot een zuiver repeteerende breuk. Deze moet nog gedeeld worden door 10^3 en geeft dus een gemengd repeteerende breuk met drie niet-repeteerende cijfers.

Opgaven.

1. Geef van de volgende breuken onmiddellijk op, of zij te herleiden zijn tot een eindigende tiendeelige, zuiver repeteerende of gemengd repeteerende breuk. Geef bij de eindigende tiendeelige breuken aan, uit hoeveel decimalen zij bestaan, en bij de gemengd repeteerende breuken, hoeveel cijfers niet repeteeren:
   $\frac{2}{3}, \frac{3}{5^2}, \frac{18}{37}, \frac{27}{32}, \frac{25}{27}, \frac{12}{113}, \frac{35}{24}, \frac{181}{5^2 . 3^2}, \frac{137}{2^3 . 3^2 . 5^2}$.
2. Eveneens van de volgende: (Onderzoek eerst of zij verkleinbaar zijn.)
   $\frac{15}{370}, \frac{18}{75}, \frac{9}{140}, \frac{170}{56}, \frac{135}{348}, \frac{237}{520}, \frac{68}{36}, \frac{32}{125}, \frac{138}{460}$ en $\frac{132}{759}$.
3. Welke echte breuken met 24 tot noemer geven bij herleiding

Digitized by Google

ndigende decimale breuk, welke een zuiver repeteerende, en gemengd repeteerende ?

b geheele getallen zijn, wat levert de breuk $\frac{a \times b}{72}$

eiding op ?

. is de som van 0,536 en 0,421 gelijk, als men van elk repeteerende breuken de periode één keer, twee keer, drie keer, vier keer enz. neemt ?

6. Wat is de som van 0,536 en 0,421 ?
7. Herleid: $2{,}3158 + 1{,}2714$; $0{,}873 + 1{,}459$; $2{,}3078 + 1{,}9856$.
8. Schrijf 0,23 en 0,457 als repeteerende breuken met **zes** cijfers in de periode, en bepaal daarna hun som.
9. Bepaal de som van: 0,374 en 2,58, ook van 3,273 en 1,4583; van 0,237 en 1,142857.
10. Bepaal ook het verschil van:
    2,37 en 0,45; 2,314 en 1,457; 1,23 en 0,156;
    3,4276 en 1,53; 2,746 en 1,3852; 0,278 en 0,142857.
11. Bereken:
    $8 \times 0{,}275$; $7 \times 1{,}358$; 4×2746
    $70 \times 1{,}3894$; $600 \times 0{,}27$; $900 \times 3{,}586$.
12. Vul in:
    $7 \times 3{,}256 =$
    $20 \times 3{,}256 =$
    $27 \times 3{,}256 =$
    Bereken nu ook:
    $63 \times 1{,}25$; $274 \times 1{,}2536$; $498 \times 1{,}375$.

Herleiding van repeteerende breuken tot gewone.

127. Zooals onderstaande bewerking aantoont, is 0,513 ontstaan uit de herleiding van $\frac{19}{37}$ tot een tiendeelige breuk.

$$
\begin{array}{l|l}
37 & 19{,}0 \,(\, 0{,}513 \\
\underline{185} & \\
50 & \\
\underline{37} & \\
130 & \\
\underline{111} & \\
19 &
\end{array}
$$

Digitized by Google

Wij noemen nu $\frac{19}{37}$ **de voortbrengende breuk** van $0,\overline{51}3$.

Zoowel $\frac{19}{37}$ als $0,\overline{51}3$ stellen de waarde voor van het quotient 19 : 37 en zijn dan ook aan elkaar gelijk.

In het volgende zullen wij de voortbrengende breuk leeren bepalen, die bij een repeteerende breuk behoort.

Zij gegeven de zuiver repeteerende breuk $0,\overline{231}4$.

Vermenigvuldigt men deze met zulk een macht van tien, dat het decimaalteeken achter de periode komt te staan, dus met 10^4 of 10000, dan krijgt men:

$$\begin{array}{rl} 10000 \times \text{de repeteerende breuk} = & 2314,\overline{231}4 \\ 1 \times \text{de repeteerende breuk} = & \quad 0,\overline{231}4 \\ \hline 9999 \times \text{de repeteerende breuk} = & 2314 \end{array} \text{ af}$$

$$\text{de repeteerende breuk} = \frac{2314}{9999}.$$

Andere voorbeelden.

1. $0,\overline{35}$.

$$\begin{array}{rl} 100 \times \text{de rep. breuk} = & 35,\overline{35} \\ 1 \times \text{de rep. breuk} = & \quad 0,\overline{35} \\ \hline 99 \times \text{de rep. breuk} = & 35 \end{array} \text{ af}$$

$$\text{de rep. breuk} = \frac{35}{99}.$$

2. $0,1\overline{42857}$.

$$\begin{array}{rl} 1000000 \times \text{de rep. breuk} = & 142857,1\overline{42857} \\ 1 \times \text{de rep. breuk} = & \quad 0,1\overline{42857} \\ \hline 999999 \times \text{de rep. breuk} = & 142857 \end{array} \text{ af}$$

$$\text{de rep. breuk} = \frac{142857}{999999}.$$

Uit het voorgaande volgt:

Een zuiver repeteerende breuk heeft tot voortbrengende breuk een gewone, waarvan de teller gelijk is aan de periode, terwijl de noemer uit zooveel negens bestaat, als er cijfers in de periode zijn.

128. Om de voortbrengende breuk te bepalen, die bij een gemengd repeteerende breuk behoort, b.v. bij $0,37\overline{256}$, vermenigvuldigt men deze eerst met zulk een macht van tien, dat het decimaalteeken achter de periode, daarna met een andere macht van tien, dat het decimaalteeken vlak vóór de periode komt te staan; aldus:

Digitized by Google

$$\begin{array}{rl} 100000 \times \text{de rep. breuk} = & 37256{,}256 \\ 100 \times \text{de rep. breuk} = & 37{,}256 \\ \hline 99900 \times \text{de rep. breuk} = & 37256-37 \end{array} \text{ af.}$$

$$\text{de rep. breuk} = \frac{37256-37}{99900}.$$

Hieruit volgt:

Een gemengd repeteerende breuk heeft tot voortbrengende breuk een gewone, waarvan de teller gelijk is aan het getal bestaande uit de niet-repeteerende cijfers, gevolgd door de periode, verminderd met het getal, bestaande uit de niet-repeteerende cijfers; terwijl de noemer bestaat uit zooveel negens als er cijfers repeteeren, gevolgd door zooveel nullen als er cijfers niet repeteeren.

Opgaven.

1. Welke zijn de voortbrengende breuken van:
   $0{,}2\overline{75}$; $0{,}\overline{492}8$; $0{,}2\overline{85714}$; $0{,}\overline{571428}$; $0{,}\overline{384615}$;
   $0{,}\overline{461538}$; $0{,}9\overline{648}$; $0{,}25\overline{374}$?
2. Welke gewone breuken geven bij herleiding een zuiver repeteerende breuk met drie cijfers in de periode?
3. Welke der volgende breuken is de grootste:
   0,123 of $0{,}12\overline{3}$ of $0{,}1\overline{23}$ of $0{,}12\overline{3}$?
4. Is $0{,}4\overline{2} = 0{,}2 + 0{,}\overline{2}$? $0{,}6\overline{53} = 0{,}\overline{35} + 0{,}3$? $0{,}4\overline{53} = 0{,}\overline{85} - 0{,}4$?
   $0{,}17\overline{8} = 0{,}\overline{8} - 0{,}61$?
5. Splits de volgende gemengd repeteerende breuken in de som of het verschil van een zuiver repeteerende en een eindigende breuk:
   $0{,}2\overline{7}$; $0{,}2\overline{73}$; $0{,}9\overline{73}$; $025\overline{381}$; $0{,}91\overline{376}$.
6. Welke is de voortbrengende breuk van $0{,}\overline{9}$? Voer de deeling zoo uit, dat met uw breuk werkelijk $0{,}\overline{9}$ kan verkregen worden.
7. Hoeveel is: $0{,}2\overline{37} + 0{,}\overline{762}$? $0{,}\overline{4587} + 0{,}5\overline{412}7$?
   $0{,}9\overline{35} + 0{,}0\overline{64}$?

Herleid de volgende vormen:

8. $$\frac{(5{,}8\overline{3} \times 1{,}\overline{6} + 8\frac{3}{4} - 10 \times 1{,}1\overline{6}) : 4{,}375}{2 - 0{,}3\overline{9}}.$$

9. $$1 : \frac{13{,}\overline{6} + 14{,}8\overline{3} - 8\frac{1}{4} \times \frac{8}{11}}{7{,}5 : 1\frac{1}{4} - 1{,}9\overline{4} : 0{,}5}.$$

Digitized by Google

10. $\dfrac{1{,}141\mathfrak{3} \times \frac{75}{107} - \frac{1}{4} \times 2{,}18\mathfrak{9} : 8{,}1}{0{,}\mathfrak{7}2\mathfrak{9}} - 0{,}0\mathfrak{0}3\mathfrak{7}.$

11. $\dfrac{\left(1 - \dfrac{3\frac{3}{8}}{6\frac{3}{4}} \times \dfrac{4{,}5}{13\frac{1}{2}}\right) : \dfrac{17{,}\mathfrak{7}}{14{,}\mathfrak{5}\mathfrak{4}}}{(0{,}875 : 0{,}\mathfrak{2}8571\mathfrak{4}) \times \dfrac{5{,}14285\mathfrak{7}}{2{,}52} : \dfrac{20}{0{,}\mathfrak{2}\mathfrak{7}}}.$

12. $\{(15{,}125 - 3{,}\mathfrak{3} : 0{,}5\mathfrak{3}) \times (6{,}0\mathfrak{6} + 3{,}5 \times 0{,}1\mathfrak{3}) - 7{,}98\mathfrak{3}\} : 1\dfrac{79}{121}.$

13. $(0{,}\mathfrak{5}2\mathfrak{9} + 0{,}\mathfrak{4}7\mathfrak{0})^2 : (0{,}\mathfrak{7}36\mathfrak{4} - 0{,}\mathfrak{4}03\mathfrak{1})^2 : (2{,}14285\mathfrak{7} : 0{,}\mathfrak{8}5714\mathfrak{2})^2.$

14. $(1{,}08\mathfrak{3} : 0{,}0\mathfrak{6} - 4{,}5 \times 10{,}\mathfrak{6} : 3{,}\mathfrak{4}2857\mathfrak{1}) \times 0{,}0\mathfrak{4}.$

15. $(0{,}\mathfrak{5}2\mathfrak{9} + 0{,}\mathfrak{5}3\mathfrak{9} - 0{,}\mathfrak{0}6\mathfrak{0}) : (7{,}\mathfrak{9} : 5{,}\mathfrak{2}8571\mathfrak{4}).$

16. $\dfrac{3{,}\mathfrak{0}0\mathfrak{3} \times 7{,}4 - 13{,}\mathfrak{3} \times 1{,}\mathfrak{1}}{8{,}8 + 3\frac{2}{3} - \dfrac{7\frac{3}{4}}{5{,}\mathfrak{3}} \times \dfrac{16}{31}} \times \dfrac{25{,}08\mathfrak{3} + 33{,}5}{0{,}\mathfrak{5} \times 0{,}6}.$

17. $18\dfrac{1\frac{1}{3}}{1\frac{3}{5}} : \left(7\dfrac{2{,}\mathfrak{3}}{2{,}\mathfrak{6}} + 11\dfrac{15}{16} - 14{,}1625\right) + \dfrac{12{,}\mathfrak{8}5714\mathfrak{2} \times 1{,}1\mathfrak{6} - 9{,}\mathfrak{6}}{(6{,}\mathfrak{6} : 4{,}8\mathfrak{3}) \times 0{,}42\mathfrak{4}\mathfrak{7}}.$

18. $\dfrac{23}{7{,}\mathfrak{6}} : \left\{\dfrac{3{,}\mathfrak{4}6153\mathfrak{8}\,(0{,}\mathfrak{6} + 1{,}\mathfrak{2}5\mathfrak{9})}{0{,}\mathfrak{5}} - \dfrac{2\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times 0{,}\mathfrak{6}1538\mathfrak{4}}{\frac{1}{2} : 6{,}5}\right\}.$

19. $0{,}08\mathfrak{3} - \left(\dfrac{1}{3{,}\mathfrak{3}} : \dfrac{1{,}5}{1\frac{3}{7}}\right) \times \dfrac{2}{10\frac{2}{7}} + 0{,}7\mathfrak{2}$ gedeeld door:

$$\frac{5\frac{1}{7}}{\frac{1}{2} : 0{,}04\mathfrak{9}} \times \frac{0{,}\mathfrak{3}}{2\frac{2}{5}} \times \frac{1{,}2}{2\frac{4}{5}}.$$

20. $(0{,}27\mathfrak{5}64\mathfrak{3} - 0{,}23\mathfrak{6}03\mathfrak{9}) \times \dfrac{5\frac{17}{18} - (12\frac{1}{8} + 7\frac{1}{6} - 15\frac{3}{4})}{\dfrac{43{,}25}{454{,}5}}.$

METRIEK STELSEL VAN MATEN, GEWICHTEN EN MUNTEN.

129. In de achttiende eeuw had ieder gewest, ja iedere stad bijna, een eigen stelsel van maten, gewichten en munten. Dat die toestand voor het handelsverkeer niet bevorderlijk was, valt dadelijk in het oog. Om daaraan een einde te maken, besloot de Nationale Vergadering te Parijs in 1790 aan de Academie van Wetenschappen op te dragen een nieuw stel maten, gewichten en munten te ontwerpen. Deze commissie ging uit van het denkbeeld om de nieuwe eenheden uit bepaalde afmetingen der aarde af te leiden.

In 1792 werd besloten den meridiaanboog tusschen Duinkerken en Montjouy bij Barcelona te meten. De meting wees een uitkomst

Digitized by Google

van 551583,6 toises aan. Deze commissie stelde de afplatting der aarde op $\frac{1}{344}$ en bepaalde, ook met behulp van vroeger gevonden metingen, het vierde deel van een meridiaan op 5130740 toises.

Het tienmillioenste deel hiervan werd als eenheid van lengte aangenomen onder den naam van Meter. Een staaf van platina, die, bij de temperatuur van smeltend ijs, tusschen de middelpunten der eindvlakken deze lengte bevat, werd te Parijs door Lenoir vervaardigd en kreeg den naam van **standaardmeter.** Een copie van den standaardmeter wordt te Delft bewaard.

Deze Meter is de eenheid van lengte.

De veelvouden van den Meter zijn:

De Dekameter (DM), de Hektometer (HM), de Kilometer (KM) en de Myriameter (MM).

De onderdeelen zijn:

De decimeter (dM), de centimeter (cM) en de millimeter (mM).

De lengtematen zijn tiendeelig ingedeeld, d. w. z. bij de veelvouden is elke volgende maat tien maal zoo groot, als de onmiddellijk voorafgaande; bij de onderdeelen is elke volgende maat tien maal zoo klein als de onmiddellijk voorafgaande.

Vlaktematen. De eenheid der vlaktematen is de **Are** (A), dat is de oppervlakte van een vierkant, waarvan iedere zijde een Dekameter is.

Er is slechts een veelvoud de Hektare (HA) en een onderdeel de centiare (cA).

Ook mag men als vlaktematen gebruiken de vierkanten, die een der wettige lengtematen tot zijde hebben:

MM^2, KM^2, HM^2, DM^2, M^2, dM^2, cM^2, mM^2.

De vlaktematen zijn honderddeelig ingedeeld.

Ruimtematen. De eenheid der ruimtematen is de **Stere** of Kubieke Meter (S, M^3).

De Stere heeft één veelvoud: de Dekastere (DS) en één onderdeel: de centistere (cS).

Wettige ruimtematen zijn ook de kuben, die een der wettige lengtematen tot ribbe hebben:

MM^3, KM^3, HM^3, DM^3, M^3, dM^3, cM^3, mM^3.

De ruimtematen zijn duizenddeelig ingedeeld.

Inhoudsmaten. De eenheid der inhoudsmaten is de **Liter** (L), d. i. de inhoud van een dM^3.

Digitized by Google

De veelvouden zijn: KL, HL en DL.
De onderdeelen: dL en cL.
Andere inhoudsmaten zijn:
de scheepston (1 M^3) voor binnenvaartuigen;
de registerton (1,5 M^3) voor zeeschepen.

Gewichten. Met het stelsel der maten hangt dat der gewichten samen. Er zijn twee eenheden: het **Gram** (G) en het **Kilogram** (KG). Het Kilogram is het gewicht van een kubieke decimeter zuiver water van 4^0 Celsius.

Verder worden nog gebruikt de volgende gewichten:
MG, HG, DG, dG, cG, mG.

Munten. De munten dienen, om de waarde van een voorwerp aan te geven. Men heeft standpenningen en pasmunt.

Standpenningen noemt men de munten, welke ieder (tegen betaling van het muntloon) mag laten aanmunten. Sommige landen hebben alleen gouden of alleen zilveren standpenningen, andere gouden en zilveren standpenningen. Van de eerste zegt men, dat zij den **enkelen standaard** hebben; van de andere, dat zij den **dubbelen standaard** hebben. In alle landen, waar zilveren standpenningen waren, is de aanmunting verboden. De reden daarvan is, dat het zilver zoo sterk in waarde achteruitgegaan is. Had een land vroeger den dubbelen standaard, maar is de vrije aanmunting van zilver verboden, dan zegt men, dat het land den **hinkenden standaard** heeft.

Nederland heeft den hinkenden standaard.

De standpenningen zijn tot elk bedrag betaalbaar.

Onze gouden standpenning is het tienguldenstuk (gouden tientje); onze zilveren standpenningen zijn de rijksdaalder, de gulden en de halve gulden.

Pasmunt noemt men de munten, waarmede kleine geldsommen betaald worden. Wij hebben zilveren pasmunt (kwartje, dubbeltje en stuiver) en bronzen pasmunt ($2^1/_2$ cent, cent en halve cent).

Niemand is verplicht zilveren pasmunt tot een hooger bedrag dan 10 gulden en bronzen pasmunt tot een hooger bedrag dan 25 cent aan te nemen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

LUBBERHUIZEN, Het Opstel. Stijloef. voor het voortgezet onderwijs f 0,45
Dr. C. TE LINTUM, Overz. der Vaderl. Geschiedenis. Met vele illustr. „ 1,25
id. Vaderlandsche Geschiedenis voor H. B. S., Gymnasia, Kweek- en Normaalsch., Vaksch. en zelfstandige Studie, 2 dln., à „ 1,25
id. Leerboek der Algemeene Geschiedenis met illustraties, deel I „ 1,25
dl. II f 1,75, dl. III f 1,65.
Dr. J. J. MOOLHUIZEN en J. C. BOUWMEESTER, Met z'n Vieren. Een viertal leesb. voor Gymn., H. B. S., Kweek- en Normaalsch. dl. I 2e dr. f 0,75, geb. f 1,05, dl. II 2e dr. f 0,90, geb. f 1,20, dl. III 2e dr. f 1,20, geb. f 1,50, dl. IV f 1,20, geb „ 1,50
Dr. D. C. NIJHOFF, Staatk. Gesch. van Ned., 2 dln., ing. f 3,75, geb. „ 4,75
F. NICOLAY, Slecht Opgevoede Kinderen. Naar de 16e Uitg. bew. door Mevr. Goudsmit Polano met een inleidend woord van J. Geluk ing. f 1,80, geb „ 2,40
Dr. A. C. OUDEMANS, Beknopte Zak- en Schoolflora geb. „ 1,65
id. Leerboek der Natuurlijke Historie. I Dierkunde. Leerboek voor a. s. Onderwijzers. Handleiding bij het onderwijs aan Middelbare Scholen en Gymnasia in Nederland en zijne Koloniën. f 2,90, Geb. „ 3,40
H. DE PIERRES, La Littérature Française au XIXe Siècle. Recueil de morceaux choisis à l'usage des gymn. et des écoles moyennes. Deuxième édition, revue et augmentée ing. f 1,90, geb. „ 2,50
C. PLOETZ, Lectures Choisies. Chrestomathie française „ 1,25
Dr. O. SCHMEIL, Leerb. der Dierkunde. Naar het Duitsch. Voor Nederl. bew. door Dr. P. G. Buekers. 1e stuk: Zoogdieren „ 0,65
2e stuk: Vogels, Kruipende dieren, Tweeslachtige dieren en Visschen. f 0,95, 3e stuk: Gelecdpootige- en Weekdieren, Wormen, Stekelhuidige-, Holte- en Voordieren „ 1,10
compl. ing. f 2,70, geb. „ 3,25
Dr. O. SCHMEIL, Leerboek der Plantkunde. Voor Nederland bewerkt door Dr. P. G. Buekers. 1e stuk f 1,40. 2e stuk „ 1,40
R. SCHUILING, Beknopt Leerb. der Aardrijksk., 2e dr., ing f 2,55, geb. „ 3,—
id. Onze Aarde I. Nederl. en Algem. Aardrijksk. 2e dr. f 0,70, gecart. „ 0,80
id. „ „ II. Europa, 2e verb. dr., ing. f 0,80, gecart. „ 0,90
id. „ „ III. De werelddeelen buiten Europa en de Nederl. Koloniën in Oost en West, 2e verb. druk, ing. f 0,75, gecart. „ 0,85
id. Neerlands Koloniën. Bekn. handleiding ten dienste van het onderwijs. Met vele platen en figuren, benevens enkele schetskaarten. Ing. f 1,25, gecart „ 1,35
id. Algemeene Aardrijksk. ten dienste van het onderw. en voor zelfstudie. I. Lucht, Water, Land f 1,50, gecart. „ 1,60
II. Planten, Dieren, Menschen en Staten f 1,— „ „ 1,10
R. SEAMER. Shakespeare's Stories „ 1,50
E. A. H. SEIPGENS, Hoogduitsche Spraakkunst voor eerstbeginnenden (als Inleiding tot de Hoogduitsche Sprachlehre für Niederländer) 3e verbeterde druk, nagezien door C. J. Vierhout „ 0,40
id. Oefeningen behoorende bij de Hoogduitsche Spraakkunst, 3e druk, nagezien door C. J. Vierhout „ 0,60
id. Hochdeutsche Sprachlehre für Niederländer, Zweite, durchgesehene und verbesserte Auflage „ 1,—
id. Uebungsaufgaben zur Hochdeutschen Sprachlehre für die Mittelklassen. Erstes Heft. Zweite Auflage f 0,80. Zweites Heft „ 0,60
id. Deutsches Lesebuch für die Niederländische Schule. 1e, 2e und 3e Teil. Preis pr. Teil „ 1,25

MUSTERWERKE DER DEUTSCHEN LITERATUR

mit Noten und Erläuterungen

für Schule und Haus. Herausgegeben von E. A. H. SEIPGENS.

I. KARL GUTZKOW, Uriel Acosta, Trauerspiel in fünf Aufzügen „ 0,50
II. PAUL HEYSE, l'Arrabbiata Novelle. Zweite Auflage „ 0,25
III. S. H. MOSENTHAL, Der Sonnwendhof. Volksschausp. in 5 Aufzüg. „ 0,60
IV. FR. VON SCHILLER. Wilhelm Tell. Ein Schauspiel in 5 Aufzügen „ 0,60
V. FRIEDRICH HALM, Der Fechter v. Ravenna. Trauersp. in 5 Akt. „ 0,60

Gecartonneerd per deeltje 5 cent hooger.

Digitized by Google

BIBLIOTHEK MODERNER DEUTSCHER LITERATUR.

für Schule und Haus. Herausgegeben von M. HORN.

Prijs per No. *f* 0,50, geb. *f* 0,90. Dubbele No.'s *f* 1,—, geb. *f* 1,50.

1: 2. J. V. VON SCHEFFEL, Der Trompeter von Säckingen. Zweite Auflage.
3. G. FREYTAG, Die Journalisten. Zweite Auflage.
4. A. ROQUETTE, Waldmeisters Brautfahrt.
5. R. HAMERLING, Teut.
6. P. HEYSE. Siechentrost.
7. G. VON MOSER, Ultimo.
8. TH. STORM, Immensee, Auf dem Staatshof.
9. G. HAUPTMANN Kollege Crampton.
10. P. HEYSE, Unvergeszbare Werte.
11. G. KINKEL, Der Grobschmied von Antwerpen
12/13. F. W. WEBER, Dreizehnlinden.

J. A. SCHUTTE, Spreekwijzen aan het dagelijksch leven ontleend verklaard en toegelicht *f* 0,75

De Studeerende Onderwijzer, Tijdschrift voor de hoofdacte en vergelijkende examens, onder redactie van S. DE GAST Jzn. en H. VAN STRIEN en met medewerking van vele specialiteiten. 9e Jaargang. Prijs per jaargang van 12 afl. *f* 5,20, fr. p. post „ 5,70

SNIJDERS, Dr., Handleiding b/h onderwijs in de Plant- en Dierkunde, 1e cursus, 3e druk „ 1,40
2e „ 2e „ „ 1,70
3e „ 2e „ (Het Menschelijk lichaam) „ 0,90

A. C. W. STARING, Gedichten, complete zorgvuldig herziene 8e druk ing. *f* 1,25, geb. „ 1,70

Dr. F. A. STOETT, De Hoofdzaken der Nederlandsche Spraakkunst, ten behoeve van Gymnasia en H. B. S., 4e druk „ 0,60

C STOFFEL, Studies in English, I „ 4,50
id. Engelsch Leesboek I Proza, 2e druk „ 1.25
id. „ „ II Poëzie „ 1,25
id. „ „ v. aanvangsklassen I 2e dr. en II à „ 0,60
id. „ „ „ „ III 2e dr. „ 0,75

J. J. STOEL, Leerboek der Werktuigkunde ing. *f* 2,25, gecart. „ 2.35

K. F. SÜPFLE, Opstellen ter vertaling in het Latijn voor de laagste en Middelste Klassen der Gymnasiën, Naar de 18e Hoogd. uitgave opnieuw bewerkt door Dr. Bruins, 1e deel 5e druk *f* 1,40, 2e deel 4e druk „ 1.20

W. SWIJNENBURG, Studeeren en Repeteeren. Vragen en Opgaven bij het bestudeeren van „De School" „ 0.75

O. VEENSTRA, Engelsch Leer- en Leesboek, eene grammaticale directe methode „ 0,60

P. v. D. VELDE Mz., Touchstones. Engelsche Vertaaloefeningen voor meergevorderden „ 0,50

EELCO VERWIJS, Bloemlezing uit Middelnederlandsche Dichters, bezorgd door Dr. F. A. Stoett, 4 dln. samen „ 9,—

WUNDERLICH, Aardrijkskunde van Nederland, met kaartjes en graphische voorstellingen, 3e druk „ 1,35
id. Insulinde. Land en Volk van Nederlandsch Indië. Geïllustr, „ 1,50

E. ZUIDEMA, Hoofdpunten der Algemeene Geschiedenis. Handboek voor leerlingen van H. B. S., Gymnasiën en andere inrichtingen van voortgezet onderwijs „ 2,40

C. C. ZWETS, Vragen en Oefeningen naar aanleiding van Koonings' Leerboek der Paedagogiek benevens proeven van bewerking tot het maken van Paedagogische Opstellen „ 0.75

J. G. ZIJLSTRA, Het Rekenonderwijs, 3e druk, ing. *f* 1,25, geb. „ 1,50
id. Het Leesonderwijs, 3e „ „ - 1,25, „ „ 1,50
id. Beknopte Geschiedenis der Opvoedkunde, 3e druk, ing. „ 1,25
geb. „ 1,50

Digitized by Google

THEORIE EN PRAKTIJK.

LEERBOEK DER REKENKUNDE

VOOR

HOOGERE BURGERSCHOLEN

DOOR

H. A. DERKSEN en **G. L. N. H. DE LAIVE,**
Leeraren aan de Hoogere Burgerschool te Nijmegen.

TWEEDE DEEL.

ZUTPHEN,
W. J. THIEME & Cie.
1902.

Prijs ing. f 1.—, gecart. f 1.10.

Digitized by Google

Uitgaven v/h. Onderwijs van W. J. THIEME & Cie. te Zutphen.

Dr. G. Bakker, Leerboek der Werktuigkunde, vooral ten dienste der H. B. S. ƒ 1,80

A. A. Beekman, Aardrijkskunde van Nederland, ten dienste van a. s. onderwijzers en van Norm.- en Kweekscholen „ 1,50

id. Aardrijkskunde van Nederland, ten dienste van M. U. L. ond., Normaalsch., de laagste kl. v. H. B. S., Gymn. enz., 2e Leerb. „ 0,45

id. Aardrijkskunde van Nederland, voor de 3e en hoogere klassen van H. B. S., Gymn. enz., 3e Leerboekje „ 1.-

id. en Schuiling, Schoolatlas v. Nederl., 3e dr., in 24 kaarten ing. ƒ 2,90, geb. „ 3,75

id. Schoolatlas v. d. Geheele Aarde, 2e druk, bevattende ruim 50 kaarten, benevens 100 kartons, ing. ƒ 3,90, geb. „ 4,90

D. Boswijk en W. Walstra, Het Levende Woord, 1e stukje, 5e dr. ƒ 0,75, 2e st. 4e dr. ƒ 0,90, 3e st. 3e dr. ƒ 1,—, 4e st. 2e dr. „ 1,—

id. Nederlandsche Spraakkunst, 2e druk „ 1,—

id. Vragen en Opgaven b/d Nederl. Spraakkunst, 2e druk „ 0,50

id. Bouwstoffen voor een 80tal Opstellen, 3e druk „ 0,75

Bouwmeesters, Hebt Gij Uw kind lief? Schetsen voor ouders, onderwijzers en allen die met kinderen omgaan, ing. ƒ 1,50, geb. „ 1,90

S. J. H. Brugmans, Genealogische Tabellen, ten gebruike bij het onderwijs in de Geschiedenis „ 0,75

id. Historische Atlas, ten gebruike bij het onderwijs in de Vaderlandsche Geschiedenis. Tweede herziene en vermeerderde dr. ing. ƒ 1,—, geb. „ 1,25

S. de Bruin, Duitsch Woordenboek 2 din. in een band „ 4,90

id. Engelsch „ 2 „ „ „ „ „ 4,90

id. Fransch „ 2 „ „ „ „ „ 3,90

id. A Dutchman's difficulties with the English language „ 0,35

id. Jean Firlefanz Jenne und die Deutsche Sprache „ 0,45

Dr. D. Bruins, Beknopte Ned.-Latijnsche Woordenlijst. (Naar aanl. van Süpfle's Opstellen bewerkt), 2e z. verm. dr. „ 1,20

H. A. Derksen en G. L. N. H. de Laive, Leerboek der Algebra m. vraagstukk., 1e dl., 3e dr., ƒ 1,25, 2e dl., 2e dr., ƒ 1,35, 3e dl., 2e dr. ƒ 1,35, 4e dl. „ 1,25
Gecartonneerd 10 cent per deel hooger.

id. Antwoorden op deel I, II, III en IV, à „ 0,35

id. Leerboek der Vlakke Meetkunde m. Vraagst., dl. I ƒ 0,90, gecart. „ 1,—
dl. II ƒ 0,80, gecart. ƒ 0,90; dl. III ƒ 1,20, gecart. „ 1,30

id. Theorie en Praktijk. Leerboek der Rekenkunde voor Hoogere Burgerscholen, 1e deel. ing. ƒ 1,—, gecart. „ 1,10

A. van Dissel, Deutsche Dichter und Prosaiker von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Ein Lesebuch für höhere Lehranstalten. Gebonden „ 3,75

Dr. J. J. Doesburg en E. Zuidema, Algemeene Geschiedenis, Leerboek v. H. B. S. en andere inrichtingen van voortgezet onderwijs
Deel I. Geschiedenis v/d Oudheid en de Middeleeuwen „ 1,25
„ II. Nieuwe Geschiedenis van 1492—1789 „ 1,—
„ III. Nieuwste Geschiedenis van 1789 tot onzen tijd „ 1,25

Dozy en Brugmans, Dr., Historische Atlas, 2e dr. ƒ 2,50, geb. „ 3,10

Examenopgaven v/d Hoofdacte in 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898 1899, 1900 en 1901, voorzien v/d antwoorden der vraagstukken „ 1,—

Dr. P. Fockens, Beknopte Geschiedenis der Nederlandsche Letterkunde ten gebruike bij het onderwijs „ 1,25

P. Kat Pz., Nederlandsche Spraakkunst, 3e druk „ 1,50

id. Beknopte Nederlandsche Spraakkunst met oefeningen, 2e dr. „ 0,80

id. Oefeningen, 5e druk „ 0,50

id. Woordenboekje der Nederlandsche Taal „ 0,30

A. J. Klein Swormink, Leerboek der Rekenkunde ten dienste der Gymnasia en H. B. S. „ 1,20

id. Regelmatige Veelvlakken „ 0,60

A. M. Kollewijn Nzn., Geschiedenis van Nederlandsch Oost- en West-Indië. Tweede druk „ 0,90

J. Koosings, De School, 9e verm. druk, ing. ƒ 2,40, geb. „ 2,90

id. Leerboek der Paedagogiek, 2 din., dl. I 4e dr., dl. II 4e dr. „ 1,35

Digitized by Google

THEORIE EN PRAKTIJK.

Digitized by Google

Digitized by Google

THEORIE EN PRAKTIJK.

LEERBOEK DER REKENKUNDE

VOOR

HOOGERE BURGERSCHOLEN

DOOR

H. A. DERKSEN en G. L. N. H. DE LAIVE,

Leeraren aan de Hoogere Burgerschool te Nijmegen.

TWEEDE DEEL.

ZUTPHEN,
W. J. THIEME & Co.,
1902.

Digitized by Google

INHOUD.

Bladz.

Verhoudingen 1
Evenredigheden 6
Evenredige Grootheden 20
Kettingregel 36
Gezelschapsregel 41
Interestrekening 47
Kortingen in den handel 56
Mengingrekening 63
Gemiddelde Vervaltijd 69
Winst en Verlies 75
Effectenrekening 82
Vierkantsworteltrekking 90
Derdemachtsworteltrekking 101
Vraagstukken van verschillende Examens 109

Digitized by Google

VERHOUDINGEN.

130. Vergelijkt men een lijn van 48 cM en een andere van 32 cM met een lijn van 1 cM, dan merkt men op, dat de laatste 48 maal op de eerste en 32 maal op de tweede begrepen is. De lijn van 1 cM is de maat, waarmee de twee andere lijnen gemeten zijn.

Had men als maat gekozen een lijn van 8 cM, dan zou men gezien hebben, dat die maat op de eerste lijn 6 maal en op de tweede 4 maal begrepen was.

De getallen 48 en 32 of 6 en 4 wijzen aan, hoeveel maal een zekere maat op elke der twee lijnen begrepen is. Zij drukken dus een betrekking uit tusschen de onderlinge grootte der twee lijnen. Deze betrekking noemt men **verhouding,** en men schrijft ze:

48 : 32 of 6 : 4. (Het teeken : wordt gelezen: **„staat tot"**).

Bepalingen. *De getallen* 48 *en* 32 *heeten* **de termen** *der verhouding* 48 : 32; *het getal* 48 *heet* **de eerste** *of* **voorgaande term,** 32 *heet* **de tweede** *of* **volgende term** *der verhouding.*

Het quotient van de termen der verhouding heet **het verhoudingsgetal.**

Twee verhoudingen heeten **gelijk,** *als ze hetzelfde verhoudingsgetal hebben.*

4 : 10 en 3 : $7\frac{1}{2}$ zijn gelijke verhoudingen.

Digitized by Google

INHOUD.

Bladz.

Verhoudingen 1
Evenredigheden 6
Evenredige Grootheden 20
Kettingregel 36
Gezelschapsregel 41
Interestrekening 47
Kortingen in den handel 56
Mengingrekening 63
Gemiddelde Vervaltijd 69
Winst en Verlies 75
Effectenrekening 82
Vierkantsworteltrekking 90
Derdemachtsworteltrekking 101
Vraagstukken van verschillende Examens 109

Blz. 9. In vraagst. 2 staat in den vierden term $\frac{2}{5}x$, lees $\frac{3}{5}x$.

Blz. 89. In vraagst. 13 staat laatsten regel: „courtage $\frac{1}{8}$ %", dit vervalt.

Blz. 109. In den noemer van vraagst. 8 staat 1,9, lees 3,9.

Blz. 111. In vraagst. 16 staat DL, lees dL.

In vraagst. 18 staat 7,5 gld., lees 750 gld.

Digitized by Google

VERHOUDINGEN.

130. Vergelijkt men een lijn van 48 cM en een andere van 32 cM met een lijn van 1 cM, dan merkt men op, dat de laatste 48 maal op de eerste en 32 maal op de tweede begrepen is. De lijn van 1 cM is de maat, waarmee de twee andere lijnen gemeten zijn.

Had men als maat gekozen een lijn van 8 cM, dan zou men gezien hebben, dat die maat op de eerste lijn 6 maal en op de tweede 4 maal begrepen was.

De getallen 48 en 32 of 6 en 4 wijzen aan, hoeveel maal een zekere maat op elke der twee lijnen begrepen is. Zij drukken dus een betrekking uit tusschen de onderlinge grootte der twee lijnen. Deze betrekking noemt men **verhouding,** en men schrijft ze:

48 : 32 of 6 : 4. (Het teeken : wordt gelezen: **„staat tot"**).

Bepalingen. *De getallen* 48 *en* 32 *heeten* **de termen** *der verhouding* 48 : 32; *het getal* 48 *heet* **de eerste** *of* **voorgaande term,** 32 *heet* **de tweede** *of* **volgende term** *der verhouding.*

Het quotient van de termen der verhouding heet **het verhoudingsgetal.**

Twee verhoudingen heeten **gelijk,** *als ze hetzelfde verhoudingsgetal hebben.*

$$4 : 10 \text{ en } 3 : 7\frac{1}{2} \text{ zijn gelijke verhoudingen.}$$

Men zegt, dat een verhouding, **2, 3,... *m* maal zoo groot** *is als een andere, wanneer het verhoudingsgetal van de eerste verhouding* 2, 3,... *m maal zoo groot is als het verhoudingsgetal van de tweede.*

Onder **het produkt of quotient** *van twee verhoudingen verstaat men een nieuwe verhouding, die tot verhoudingsgetal heeft het produkt of quotient van de verhoudingsgetallen der eerste twee.*

Digitized by Google

Eigenschappen der verhoudingen.

131. Eigenschap I. Een verhouding verandert niet, als men beide termen met een zelfde getal vermenigvuldigt.

Te bewijzen: $a:b$ is gelijk aan $ma:mb$.

Bewijs.

Van $a:b$ is het verhoudingsgetal $\frac{a}{b}$; van $ma:mb$ is het $\frac{ma}{mb}$.

En daar de breuk $\frac{a}{b}$ gelijk is aan $\frac{ma}{mb}$, hebben beide verhoudingen hetzelfde verhoudingsgetal en zijn dus gelijk.

132. Evenzoo bewijst men:

Eigenschap II. Een verhouding verandert niet, als men beide termen door een zelfde getal deelt.

133. Van deze eigenschappen maakt men gebruik om de verhouding van twee grootheden met de kleinst mogelijke geheele getallen te schrijven.

Voorbeelden.

1. *Bepaal zoo eenvoudig mogelijk de verhouding van* $5\frac{2}{5}$ *KG en* $3\frac{3}{8}$ *KG.*

Vergelijkt men elk der grootheden met 1 KG, dan ziet men, dat die maat op de eerste grootheid $5\frac{2}{5}$ maal en op de tweede $3\frac{3}{8}$ maal begrepen is.

De verhouding der twee grootheden is dus:

$$5\frac{2}{5} : 3\frac{3}{8} \text{ of } \frac{27}{5} : \frac{27}{8}.$$

Deelt men beide termen der verhouding door 27, dan verkrijgt men:

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{8}.$$

Vermenigvuldigt men beide termen dezer laatste met 5×8, dan ontstaat de verhouding:

$$8 : 5.$$

2. *Bepaal de verhouding van* $3\frac{3}{4}$ *gros tot* $7\frac{1}{2}$ *dozijn.*

Digitized by Google

$3\frac{3}{4}$ gros is gelijk aan $3\frac{3}{4} \times 12$ dozijn $= 45$ dozijn.

Vergelijkt men 45 dozijn en $7\frac{1}{2}$ dozijn ieder met 1 dozijn, dan vindt men als verhouding:

$$45 : 7\frac{1}{2} \text{ of } 45 : \frac{15}{2}.$$

Deelt men beide termen dezer verhouding door 15, dan krijgt men de verhouding:

$$3 : \frac{1}{2},$$

en door hiervan de termen met 2 te vermenigvuldigen:

$$6 : 1.$$

Opgaven.

1. Bepaal in de kleinst mogelijke geheele getallen de verhouding van:
   $7\frac{1}{2}$ gld. en $6\frac{3}{4}$ gld. — $15\frac{3}{4}$ KG en $4\frac{1}{5}$ KG
   200 Rd en 150 GT. — $5\frac{1}{2}$ M^2 en 88 dM^2.
   $3\frac{3}{4}$ HL en $7\frac{1}{2}$ DL. — 25,3 KG en 460 HG.
   58 A en 1,16 HA. — $54\frac{2}{5}$ DL. en $1\frac{3}{5}$ dS.
2. A bezit 292 gld. en B 365 gld. A wint 58 gld. en B verliest 85 gld. Hoe verhouden zich nu hunne bezittingen; hoe eerst?
3. Als A evenveel malen 3 gld. heeft als B 4 gld., hoe verhouden zich dan hunne bezittingen?

---

134. Eigenschap III. Als men den eersten term eener verhouding met m vermenigvuldigt, dan wordt de verhouding m maal zoo groot.

Te bewijzen: $ma : b$ is m maal zoo groot als $a : b$.

Bewijs.

Van de verhouding $a : b$ is het verhoudingsgetal $\frac{a}{b}$; van $ma : b$ is het $\frac{ma}{b}$. Dit laatste is m maal zoo groot als het eerste; bijgevolg is $ma : b$ ook m maal zoo groot als $a : b$.

135. Geheel op dezelfde wijze toont men aan:

Eigenschap IV. Als men den tweeden term eener ver-

Digitized by Google

houding door m deelt, wordt de verhouding m maal zoo groot.

136. Eigenschap V. Als men den eersten term eener verhouding door m deelt, wordt de verhouding m maal zoo klein.

137. Eigenschap VI. Als men den tweeden term eener verhouding met m vermenigvuldigt, wordt de verhouding m maal zoo klein.

138. Eigenschap VII. Voegt men bij den eersten term eener verhouding n maal den tweeden term, dan wordt het verhoudingsgetal met n vermeerderd.

Te bewijzen: Als van $a : b$ het verhoudingsgetal p is, dan is van $(a + nb) : b$ het verhoudingsgetal $p + n$.

Bewijs.

Is van $a : b$ het verhoudingsgetal p, dan is $a = bp$; dus is $a + nb = (p + n)b$.

Het verhoudingsgetal van $(a + nb) : b$ is derhalve $p + n$; m. a. w. n meer dan dat van $a : b$.

139. Eigenschap VIII. Neemt men van den eersten term eener verhouding n maal den tweeden term af, dan wordt het verhoudingsgetal met n verminderd.

Te bewijzen: Als het verhoudingsgetal van $a : b$ gelijk p is, dan is het verhoudingsgetal van $(a - nb) : b$ gelijk aan $p - n$.

Bewijs.

Daar p het verhoudingsgetal van $a : b$ is,

is $a = pb$,

$nb = nb$

af

$a - nb = (p - n)b$.

Hieruit volgt, dat b op $a - nb$ ook $p - n$ maal begrepen is, zoodat van $(a - nb) : b$ het verhoudingsgetal $p - n$ is, dus n minder dan dat van $a : b$.

140. Eigenschap IX. Als twee gelijke verhoudingen dezelfde volgende termen hebben, dan zijn ook de voorgaande termen gelijk.

Digitized by Google

Te bewijzen: Als $a:b$ gelijk is aan $c:b$, dan is $a=c$.

Bewijs.

Laat p het verhoudingsgetal zijn van $a:b$ en van $c:b$, dan is:

$$a=pb \text{ en ook } c=pb,$$

bijgevolg: $$a=c.$$

141. Op gelijke wijze toont men aan:

Eigenschap X. Als twee gelijke verhoudingen dezelfde voorgaande termen hebben, dan hebben ze ook dezelfde volgende termen.

Opgaven.

1. Als de verhouding van A tot B gelijk is aan 3 : 4, en die van B tot C gelijk aan 4 : 5, wat is dan de verhouding van A tot C?
2. Als de verhouding van A tot B gelijk is aan 5 : 6, en die van B tot C gelijk aan 3 : 5, wat is dan de verhouding van A tot C?
3. Hoe kan men een verhouding driemaal zoo groot; hoe vijfmaal zoo klein maken?
4. Als van twee grootheden de verhouding is als 3 : 4, en de maat, waarmee zij gemeten zijn, 5 KG is, welke zijn dan die twee grootheden?
5. Hoe kunt ge twee getallen voorstellen, waarvan de verhouding is: 3 : 5; 7 : 10; $a:b$?
6. Als van twee getallen het verhoudingsgetal $\frac{4}{3}$ is, wat is dan hun verhouding?
7. Bepaal ook de verhouding van twee getallen, die tot verhoudingsgetal hebben:
   $5\frac{1}{2}$; 7; 2,37; 0,58.
8. Deelt men het verhoudingsgetal van A : B door het verhoudingsgetal van C : B, dan krijgt men het verhoudingsgetal van A : C. Bewijs dit.
9. Vermenigvuldigt men het verhoudingsgetal van A : B met het verhoudingsgetal van B : C, dan krijgt men het verhoudingsgetal van A : C. Bewijs dit.
10. Als de verhouding van A tot B gelijk is aan 7 : 4, wat is dan de verhouding van A tot A + B, van A — B tot B, van 2A tot 3B, van A + 2B tot A — B?
    Beantwoord dezelfde vragen als de verhouding van A tot B gelijk is aan $m:n$.

Digitized by Google

11. Als A evenveel rijksdaalders bezit als B guldens, druk dan door de kleinst mogelijke geheele getallen de verhouding hunner bezittingen uit.
12. Een bleekveld is $37\frac{1}{2}$ M lang en 24 M breed; een ander is 36 M lang en 27 M breed. Bepaal de verhouding hunner oppervlakken in de kleinst mogelijke geheele getallen.

EVENREDIGHEDEN.

142. Bepalingen. *Twee gelijke verhoudingen, door het gelijkteeken verbonden, vormen een* **evenredigheid.**

$$3 : 4 = 6 : 8 \text{ en } 5\frac{1}{2} : 7\frac{1}{3} = 3 : 4$$

zijn evenredigheden.

In het volgende zullen wij een evenredigheid voorstellen door letters, aldus:

$$a : b = c : d.$$

De voorgaande termen uit iedere verhouding noemt men **de voorgaande termen der evenredigheid;** *de volgende termen uit iedere verhouding noemt men ook* **de volgende termen der evenredigheid.**

Verder noemt men een term naar de plaats, die hij in een evenredigheid inneemt:

eersten, tweeden, derden of **vierden term.**

De tweede en derde term heeten **de middelste,** *de eerste en vierde* **de uiterste termen.**

Uit de eigenschappen der verhoudingen volgen onmiddellijk de volgende eigenschappen der evenredigheden.

a. **In een evenredigheid mag men de voorgaande termen met een zelfde getal vermenigvuldigen of door een zelfde getal deelen.**

b. **In een evenredigheid mag men de volgende termen met een zelfde getal vermenigvuldigen of door een zelfde getal deelen.**

c. **In een evenredigheid mag men de termen der eerste verhouding, en ook de termen der tweede verhouding met een zelfde getal vermenigvuldigen of door een zelfde getal deelen.**

Uit $a : b = c : d$ volgen dus de volgende evenredigheden:

Digitized by Google

1. $ma : b = mc : d$
2. $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$
3. $a : bm = c : dm$
4. $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$
5. $ma : mb = nc : nd$
6. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

Van deze eigenschappen maakt men gebruik om een evenredigheid tot de kleinst mogelijke geheele getallen te herleiden.

Voorbeeld.

Zij gegeven: $7\frac{1}{2} : 4\frac{1}{6} = \frac{3}{5} : \frac{1}{3}$.

Vermenigvuldigt men de termen der eerste verhouding met 6, die der tweede met 15, dan ontstaat:

$$45 : 25 = 9 : 5.$$

Deelt men de voorgaande termen door 9 en de volgende door 5, dan verkrijgt men:

$$5 : 5 = 1 : 1.$$

Eigenschappen der Evenredigheden.

GROEP A.

143. I. Hoofdeigenschap. In een evenredigheid is het produkt der uiterste termen gelijk aan dat der middelste.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $ad = bc$.

Bewijs.

Uit de evenredigheid $a : b = c : d$ volgt de gelijkheid der verhoudingsgetallen $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$.

Vermenigvuldigt men deze gelijke verhoudingsgetallen met het produkt der noemers, dan zijn de uitkomsten weer gelijk:

$$bd \times \frac{a}{b} = bd \times \frac{c}{d},$$

of $$ad = bc.$$

Ander Bewijs:

Vermenigvuldigt men in $a : b = c : d$ den eersten term met d,

Digitized by Google

dan wordt de eerste verhouding d maal zoo groot. Deelt men den vierden term door d, dan wordt ook de tweede verhouding d maal zoo groot. De nieuwe verhoudingen zijn dan weer gelijk, zoodat men de evenredigheid verkrijgt:

$$ad : b = c : 1.$$

Deelt men hierin den tweeden term door b, en vermenigvuldigt men den derden met b, dan worden beide verhoudingen b maal zoo groot. De daardoor verkregen verhoudingen zijn nu ook gelijk:

$$ad : 1 = bc : 1.$$

Daar van deze verhoudingen de volgende termen gelijk zijn, moeten de voorgaande ook gelijk zijn, dus: $ad = bc$.

144. Van deze eigenschap maakt men gebruik om van een evenredigheid, waarvan drie termen bekend zijn, den onbekenden term te bepalen.

Voorbeelden.

1. *Welke waarde heeft x in de evenredigheid:*

$$3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{5} = 3\frac{3}{4} : x?$$

Oplossing.

Alvorens de hoofdeigenschap toe te passen, verdrijve men eerst de breuken, door de voorgaande termen met 4 en de volgende met 5 te vermenigvuldigen. Men krijgt dan:

$$14 : 21 = 15 : 5x$$

$$\text{of } \quad 2 : \ 3 = \ 3 : x$$

$$2x = 9$$

$$x = 4\frac{1}{2}.$$

2. *Bereken x uit de volgende evenredigheid:*

$$(x + 5) : (x + 2) = (2x + 7) : (2x + 2).$$

Oplossing.

Uit de hoofdeigenschap volgt:

$$(x + 5)(2x + 2) = (x + 2)(2x + 7)$$

$$\text{of } \quad 2x^2 + 12x + 10 = 2x^2 + 11x + 14$$

$$12x + 10 = 11x + 14$$

$$12x - 11x = 14 - 10$$

$$x = 4.$$

Digitized by Google

Opgaven.

Welke waarden heeft x in de volgende evenredigheden:

1. $3\frac{3}{5} : 3\frac{1}{3} = 2{,}43 : x$; $8\frac{1}{4} : 4\frac{2}{5} = x : 3\frac{1}{3}$.
2. $(5x - 1) : (3x + 5) = (x + 3) : (\frac{2}{5}x + 4\frac{2}{3})$.
3. $(2\frac{1}{2} + x) : (3 + 2x) = (x + 6\frac{1}{3}) : (2x + 9)$.
4. $a : b = c : x$.
5. $a : b = x : c$.
6. $x : a = b : c$.
7. $(a + 2x) : (b + 3x) = c : d$.
8. $(a + x) : (b - x) = (c + x) : (a - x)$.
9. $(2 + x) : (8 - x) = (3\frac{1}{3} - x) : (\frac{1}{4} + x)$.
10. $24\frac{3}{8} : x = 8{,}27 : \frac{1}{4{,}58\frac{1}{3}}$.

---

145. Omgekeerde van de hoofdeigenschap: Als twee produkten van twee factoren gelijk zijn, kan men daaruit een evenredigheid opschrijven, waarvan de factoren van het eene produkt de uiterste en die van het andere produkt de middelste termen zijn.

Gegeven: $ab = cd$.

Te bewijzen: $a : c = d : b$.

Bewijs.

Het produkt ab kan men beschouwen als het verhoudingsgetal van $ab : 1$.

Evenzoo kan men cd beschouwen als het verhoudingsgetal van $cd : 1$.

Dus is: $ab : 1 = cd : 1$.

In deze evenredigheid mag men den vierden term met b vermenigvuldigen, mits men den eersten term door b deelt (Eig. V en VI der Verhoudingen). Daardoor ontstaat:

$$a : 1 = cd : b.$$

Hierin mag men weer den tweeden term met c vermenigvuldigen mits men den derden door c deelt (Eig. III en IV der Verhoudingen). Men verkrijgt dan:

$$a : c = d : b.$$

Opmerkingen. 1. Wij hebben de factoren van het tweede produkt tot middelste termen gemaakt.

Dit hadden wij ook op een andere manier kunnen doen, omdat $c \times d = d \times c$ is, en wel als volgt:

$$a : d = c : b.$$

Digitized by Google

Vergelijkt men deze evenredigheid met die, welke wij afgeleid hebben uit $ab = cd$, dan ziet men, dat zij alleen verschillen in de plaatsing der middelste termen. Hieruit volgt dus:

In een evenredigheid mag men de middelste termen verwisselen.

2. Evenzoo had men de factoren uit het eerste produkt ab anders kunnen schrijven, nl.:

$$b : c = d : a.$$

Waaruit wij leeren:

In een evenredigheid mag men de uiterste termen verwisselen.

3. Ook had men de factoren van het tweede produkt tot uiterste termen en die van het eerste tot middelste kunnen maken, en daardoor kunnen verkrijgen:

$$c : a = b : d.$$

Daaruit volgt:

In een evenredigheid mag men de uiterste termen tot middelste en de middelste tot uiterste termen maken.

4. Uit de gelijkheid van twee produkten kan men dan door toepassing dezer eigenschappen acht evenredigheden opschrijven.

$$ab = cd$$

1. $a : c = d : b.$
2. $a : d = c : b.$
3. $b : c = d : a.$
4. $b : d = c : a.$
5. $c : a = b : d.$
6. $c : b = a : d.$
7. $d : a = b : c.$
8. $d : b = a : c.$

Opgaven.

1. Welke evenredigheden kunt ge vormen uit:
$$3a = 5b\,; \quad 2a = pq\,; \quad pq = x^2?$$
2. Hoeveel groepen van acht evenredigheden kunt ge maken van:
$$ab = xyz\,; \quad abc = xyz\,?$$
Schrijf van elke groep één evenredigheid op.

Digitized by Google

GROEP B.

Eigenschappen, die betrekking hebben op sommen en verschillen van termen.

146. Eigenschap III. In een evenredigheid staat de som der termen van de eerste verhouding tot die van de tweede, als de eerste term tot den derden, of de tweede tot den vierden.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $(a + b) : (c + d) = a : c$ of $b : d$.

Bewijs.

Telt men bij den eersten term van $a : b$ den tweeden term op, dan is het verhoudingsgetal van $(a + b) : b$ **één meer** dan van $a : b$ (Eig. VII der Verhoudingen).

Evenzoo is van $(c + d) : d$ het verhoudingsgetal **één meer** dan van $c : d$.

En daar het verhoudingsgetal van $a : b$ gelijk is aan dat van $c : d$, zal dit ook het geval zijn met de verhoudingsgetallen van $(a + b) : b$ en $(c + d) : d$.

Derhalve $(a + b) : b = (c + d) : d$.

Verwisselt men hierin de middelste termen dan verkrijgt men:

$$(a + b) : (c + d) = b : d. \qquad (1)$$

En daar uit de gegeven evenredigheid

$$a : b = c : d$$

ook volgt

$$a : c = b : d,$$

ziet men, dat de verhouding $b : d$ uit (1) vervangen mag worden door $a : c$.

147. Eigenschap IV. Het verschil der termen van de eerste verhouding staat tot dat van de tweede, als de eerste term tot den derden, of de tweede tot den vierden.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $(a - b) : (c - d) = a : c$ of $b : d$.

Bewijs.

Van $(a - b) : b$ is het verhoudingsgetal **één minder** dan van $a : b$.

Van $(c - d) : d$ is het ook **één minder** dan van $c : d$. (Eig. VIII der Verhoudingen).

En daar de verhoudingsgetallen van $(a - b) : b$ en $(c - d) : d$ ook weer gelijk zijn, is:

Digitized by Google

$$(a - b) : b = (c - d) : d,$$

waaruit na verwisseling der middelste termen volgt:
$(a - b) : (c - d) = b : d$ dus ook gelijk $a : c$.

Opmerking. Is $a < b$ en $c < d$, dan kan men b niet van a en d niet van c aftrekken. De evenredigheid, die dan bewezen moet worden, is:

$$(b - a) : (d - c) = a : c \text{ of } = b : d.$$

Deze kan ook op dezelfde wijze uit $a : b = c : d$ worden afgeleid, wanneer men deze evenredigheid eerst herleidt tot $b : a = d : c$.

148. Eigenschap V. De som der termen van de eerste verhouding staat tot hun verschil als de som der termen van de tweede verhouding staat tot hun verschil.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$.

Bewijs.

Uit $a : b = c : d$ volgt:

$$(a + b) : (c + d) = a : c \qquad \text{(Eigensch. III)}.$$

en ook $$(a - b) : (c - d) = a : c \qquad \text{(Eigensch. IV)}.$$

Hieruit volgt:

$$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$$

dus ook $$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

149. Eigenschap VI. De som der voorgaande termen staat tot de som der volgende termen als de eerste term tot den tweeden, of de derde tot den vierden.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $(a + c) : (b + d) = a : b$ of $c : d$.

Bewijs.

Verwisselt men in $a : b = c : d$ eerst de middelste termen, dan krijgt men:

$$a : c = b : d.$$

Past men hierop Eig. III toe, dan ontstaat:

$$(a + c) : (b + d) = a : b \text{ of } c : d.$$

150. Eigenschap VII. Het verschil der voorgaande termen staat tot het verschil der volgende als de eerste term tot den tweeden of de derde tot den vierden.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $(a - c) : (b - d) = a : b$ of $c : d$.

Digitized by Google

Dit bewijs wordt met behulp van Eig. IV gegeven op dezelfde wijze als in Eig. VI geschied is met behulp van Eig. III.

151. Uit VI en VII bewijst men nu gemakkelijk:

Eigenschap VIII. De som der voorgaande termen staat tot hun verschil als de som der volgende termen staat tot hun verschil.

Opmerking. Van de eigenschappen uit deze groep maakt men gebruik:

1°. Om uit een gegeven evenredigheid een andere af te leiden,

2°. Om uit een gegeven evenredigheid een onbekende op te lossen, zonder gebruik te maken van de hoofdeigenschap.

Voorbeelden.

1. **Gegeven:** $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $(a^2 + ab) : (c^2 + cd) = ab : cd$.

Bewijs.

Vermenigvuldigt men in

$$a : b = c : d$$

de termen der eerste verhouding met a en die der tweede met c, (Eig. II der Verhoudingen) dan verkrijgt men:

$$a^2 : ab = c^2 : cd.$$

Past men hierop Eig. III der Evenredigheden toe, dan ontstaat:

$$(a^2 + ab) : (c^2 + cd) = ab : cd.$$

2. *Bereken de waarde van x uit*

$$(9 + x) : (4 + x) = (39 - x) : (24 - x)$$

zonder van de hoofdeigenschap gebruik te maken.

Oplossing.

Past men op de gegeven evenredigheid eigenschap IV toe, dan verkrijgt men:

$$5 : 15 = (9 + x) ; (39 - x)$$

of

$$1 : 3 = (9 + x) : (39 - x).$$

Door hierop Eig. III toe te passen, ontstaat:

$$4 : 48 = 1 : (9 + x)$$

of

$$1 : 12 = 1 : (9 + x).$$

Vermenigvuldigt men de voorgaande termen met 9, dan verkrijgt men:

$$9 : 12 = 9 : (9 + x),$$

waaruit volgt:

$$(12 - 9) : (9 + x - 9) = 9 : 9$$

of

$$3 : x = 1 : 1$$

dus:

$$x = 3.$$

Digitized by Google

Opgaven.

Leid uit $a : b = c : d$ de volgende evenredigheden af:

1. $(a + 5b) : (c + 5d) = a : c.$
2. $(2a + 3b) : (2c + 3d) = a : c.$
3. $(am - b) : (cm - d) = a : c.$
4. $(am - bp) : (cm - dp) = b : d.$
5. $(am + cn) : (bm + dn) = (am - cn) : (bm - dn).$
6. $(ab - b^2) : (cd - d^2) = b^2 : d^2.$
7. $(a^2 + ac) : (b^2 + bd) = a^2 : b^2.$

Los uit de volgende evenredigheden x op, zonder van de hoofdeigenschap gebruik te maken:

8. $(9 - x) : 8 = (9 + x) : 28.$
9. $(x + 6) : (x + 4) = (x + 1) : x.$
10. $(2 + x) : (2\frac{1}{2} + x) = (24 - 2x) : (25 - 2x).$
11. $(x - 8) : (x - 6) = (x - 10) : (x - 9).$
12. $(x + 4) : (x + 3) = (x + 14) : (x + 12).$
13. $(x + 5) : (2x + 4) = (x + 3) : (2x + 1).$
14. $(x - 3) : (x - 4) = (x + 6) : (x + 4).$
15. $(3 + x) : (4 + 2x) = (11 + 2x) : (16 + 4x).$
16. $(27 + 5x) : (13 + 3x) = (5x + 1) : 3x.$
17. Als gegeven is: $(a + 2c) : (b + 2d) = c : d,$
bewijs dan: $a : b = c : d.$
18. Als gegeven is:
$(a + 2b) : (c + 2d) = (a - 3b) : (c - 3d),$
bewijs dan: $a : b = c : d.$
19. Hoe zult ge uit de evenredigheid
$(ab + b^2) : (cd + d^2) = b^2 : d^2$
kunnen afleiden: $a : b = c : d$?
20. Van een evenredigheid is de som der eerste twee termen 13; die der laatste twee 39 en de som der voorgaande termen 20. Welke is die evenredigheid?
21. Van een evenredigheid is de som van alle termen $23\frac{1}{3}$. De som der voorgaande termen is 15 en het verschil der termen van de eerste verhouding 4. Bepaal die evenredigheid.
22. Als van $a : b = c : d$ gegeven is:
$a + 2b = 14$, $c + 2d = 60\frac{2}{3}$, terwijl $a + c = 21\frac{1}{3}$ is, bepaal dan de evenredigheid.
23. Van een evenredigheid is de som van de termen der eerste

Digitized by Google

verhouding 20, de som der middelste termen 21 en de som der uiterste termen 23. Welke is die evenredigheid?

24. Van een evenredigheid is de som van de eerste twee termen gelijk aan driemaal hun verschil; de vierde term is 50 grooter dan de derde term en het produkt der middelste termen is 1000. Welke is die evenredigheid?

GROEP C.

Eigenschappen van twee of meer evenredigheden.

152. Eigenschap IX. De produkten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een nieuwe evenredigheid.

Gegeven: $a : b = c : d$ en $p : q = r : s$.

Te bewijzen: $ap : bq = cr : ds$.

Bewijs.

Uit de gegeven evenredigheden volgt:

$$\begin{array}{r} ad = bc \\ ps = qr \\ \hline adps = bcqr \end{array} \times$$

dus ook

of $$ap \times ds = bq \times cr.$$

En volgens het omgekeerde der hoofdeigenschap kan men hieruit opschrijven:

$$ap : bq = cr : ds.$$

Opmerking.

Heeft men meer dan twee evenredigheden, b.v.

$$a : b = c : d \quad (1)$$
$$e : f = g : h \quad (2)$$
$$i : k = l : m \quad (3)$$

en vermenigvuldigt men eerst de overeenkomstige termen van (1) en (2), daarna die van de daardoor verkregen evenredigheid en (3), dan ontstaat:

$$aei : bfk = cgl : dhm.$$

153. Eigenschap X. De gelijknamige machten van de termen eener evenredigheid vormen een nieuwe evenredigheid.

Digitized by Google

Gegeven: $a : b = c : d$.
Te bewijzen: $a^n : b^n = c^n : d^n$.

Bewijs.

Uit $a : b = c : d$ volgt:

$$ad = bc$$

dus ook $(ad)^n = (bc)^n$ of $a^n \times d^n = b^n \times c^n$.

En hieruit volgt door toepassing van de omgekeerde der hoofdeigenschap:

$$a^n : b^n = c^n : d^n.$$

154. Eigenschap XI. De quotienten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een nieuwe evenredigheid.

Gegeven: $a : b = c : d$ en $p : q = r : s$.

Te bewijzen: $\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{r} : \frac{d}{s}$.

Bewijs.

Uit de gegeven evenredigheden volgt:

$$ad = bc$$
$$ps = qr,$$

waaruit door deeling verkregen wordt:

$$\frac{ad}{ps} = \frac{bc}{qr},$$

$$\text{of } \frac{a}{p} \cdot \frac{d}{s} = \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{r},$$

dus volgens het omgekeerde der hoofdeigenschap:

$$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{r} : \frac{d}{s}.$$

155. Eigenschap XII. De gelijknamige wortels van de termen eener evenredigheid vormen een nieuwe evenredigheid.

Gegeven: $a : b = c : d$.
Te bewijzen: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Bewijs.

Uit $a : b = c : d$ volgt: $ad = bc$,

dus ook; $\sqrt[n]{ad} = \sqrt[n]{bc}$ of $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$, en hieruit door toepassing van het omgekeerde der hoofdeigenschap:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

Digitized by Google

Opgaven.

Als gegeven is: $a : b = c : d$, leid dan daaruit de volgende evenredigheden af:

1. $(a^2 + b^2) : (c^2 + d^2) = a^2 : c^2$.
2. $(a^2 + b^2) : (c^2 + d^2) = ab : cd$.
3. $(a^3 - b^3) : (a^3 + b^3) = (c^3 - d^3) : (c^3 + d^3)$.
4. $(a^3 + b^3) : (c^3 + d^3) = a^2b : c^2d$.
5. $(a^2 + b^2) : (c^2 + d^2) = (a + b)^2 : (c + d)^2$.
6. $(a^2 - b^2) : (c^2 - d^2) = (a - b)^2 : (c - d)^2$.
7. $\sqrt{(a^2 + ab)} : \sqrt{(c^2 + cd)} = a : c$.
8. $\sqrt{(a^2 + b^2)} : \sqrt{(c^2 + d^2)} = a : c$.

Aaneengeschakelde Evenredigheden.

156. Bepaling. *Verbindt men meer dan twee gelijke verhoudingen door het gelijkteeken, dan ontstaat een* **aaneengeschakelde evenredigheid.**

Voorbeelden.

$$5 : 7\frac{1}{2} = 4 : 6 = 2 : 3 = 6 : 9 \qquad (1)$$

$$a : b = c : d = e : f = g : h. \qquad (2)$$

Een aaneengeschakelde evenredigheid schrijft men wel eens onder een andere gedaante. In plaats van (2) schrijft men ook:

$$a : c : e : g = b : d : f : h.$$

Voor het gelijkteeken staan de voorgaande termen, achter het gelijkteeken de volgende.

157. Eigenschap. In een aaneengeschakelde evenredigheid staat de som of het verschil van eenige voorgaande termen tot de som of het verschil van de overeenkomstige volgende termen, als een voorgaande tot zijn volgenden.

Gegeven: $a : b = c : d = e : f = g : h$.

Te bewijzen: $(a + c - e + g) : (b + d - f + h) = a : b$.

Bewijs.

Neemt men de eerste twee gelijke verhoudingen

$$a : b = c : d,$$

dan kan men hieruit afleiden:

Digitized by Google

$$(a+c):(b+d)=a:b$$

dus ook: $(a+c):(b+d)=e:f.$

Hieruit volgt:

$$(a+c-e):(b+d-f)=e:f$$

dus ook: $(a+c-e):(b+d-f)=g:h.$

Hieruit volgt weer:

$$(a+c-e+g):(b+d-f+h)=g:h \text{ of } =a:b.$$

158. Eigenschap. De gelijknamige machten van de termen eener aaneengeschakelde evenredigheid vormen een nieuwe aaneengeschakelde evenredigheid.

Gegeven: $a:b=c:d=e:f.$

Te bewijzen: $a^n:b^n=c^n:d^n=e^n:f^n.$

Bewijs.

Uit $a:b=c:d$ volgt $a^n:b^n=c^n:d^n$

en uit $c:d=e:f$ volgt $c^n:d^n=e^n:f^n$

derhalve ook:

$$a^n:b^n=c^n:d^n=e^n:f^n.$$

159. Op gelijke wijze toont men aan:

Eigenschap. De gelijknamige wortels uit de termen eener aaneengeschakelde evenredigheid vormen een nieuwe aaneengeschakelde evenredigheid.

160. Ook bewijst men gemakkelijk:

Eigenschap. De produkten of quotienten van de overeenkomstige termen van twee aaneengeschakelde evenredigheden vormen een nieuwe aaneengeschakelde evenredigheid.

Toepassing.

Als gegeven is $a:b=c:d=e:f$, *leid dan hieruit af*:

$(a^2+2ac-3e^2):(b^2+2bd-3f^2)=a^2:b^2.$

Oplossing.

In de evenredigheid die bewezen moet worden komen voor: a^2, b^2, $2ac$, $2bd$, $3e^2$ en $3f^2$.

Om deze te verkrijgen schrijven we onder de gegeven evenredigheid de volgende: $a:b=2a:2b=3e:3f.$

Aldus: $a:b=c:d=e:f$

$a:b=2a:2b=3e:3f.$

Digitized by Google

Vermenigvuldigt men nu de overeenkomstige termen, dan verkrijgt men

$$a^2 : b^2 = 2ac : 2bd = 3e^2 : 3f^2.$$

Hieruit volgt door toepassing van § 157:

$$(a^2 + 2ac - 3e^2) : (b^2 + 2bd - 3f^2) = a^2 : b^2.$$

Opmerking. Men had dit vraagstuk ook aldus kunnen oplossen:

Noemt men p het verhoudingsgetal van elk der drie gelijke verhoudingen, dan is:

$$a = pb \text{ (1)}, \quad c = pd \text{ (2) en } e = pf \text{ (3)}.$$

Uit (1) volgt: $a^2 = p^2b^2$

uit (1) en (2) volgt: $2ac = 2p^2bd$

uit (3) volgt: $3e^2 = 3p^2f^2$.

Dus is $a^2 + 2ac - 3e^2 = p^2 (b^2 + 2bd - 3f^2)$,

of
$$\frac{a^2 + 2ac - 3e^2}{b^2 + 2bd - 3f^2} = p^2,$$

of
$$\frac{a^2 + 2ac - 3e^2}{b^2 + 2bd - 3f^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Dus ook:

$$(a^2 + 2ac - 3e^2) : (b^2 + 2bd - 3f^2) = a^2 : b^2.$$

Opgaven.

1. Als $A : B : C = a : b : c$ is, hoe leidt ge dan hieruit af:
$$(A^2 + B^2 - C^2) : (a^2 + b^2 - c^2) = A^2 : a^2?$$
2. Uit $A : B : C = a : b : c$ volgt:
$$(A^2 + B^2 + C^2) : (a^2 + b^2 + c^2) = AB : ab.$$
Bewijs dit.
3. Als $a^2 + b^2 = c^2$ is en $a : b : c = r_1 : r_2 : r_3$,
dan is $r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$. Bewijs dit.
4. Leid uit $A : B : C = a : b : c$ de volgende evenredigheden af:
$$A^2 : B^2 : BC = a^2 : b^2 : bc;$$
$$(A^2 + BC) : (B^2 + AC) = (a^2 + bc) : (b^2 + ac);$$
$$(A^2 + B^2) : (B^2 + C^2) : (C^2 + A^2) = (a^2 + b^2) : (b^2 + c^2) : (c^2 + a^2).$$
5. Als $P : Q : R = x : y : z$, hoe bewijst ge dan:
$$(P^2 + PQ) : (Q^2 - R^2) = (x^2 + xy) : (y^2 - z^2)?$$
6. Als $A : B = 1 : 2$; $B : C = 3 : 2$, wat is dan de verhouding van
$$(A^2 + 3BC - 5C^2) : (AB + B^2 - 3C^2)?$$

Digitized by Google

EVENREDIGE GROOTHEDEN.

161. Bepalingen. *Men zegt, dat een grootheid A* **afhankelijk** *is van een grootheid B, als een verandering van B ook een verandering van A ten gevolge heeft.*

Zoo is de prijs van een stuk linnen afhankelijk van de lengte; want hoe langer het stuk is, des te meer kost het.

De huur van een huis is afhankelijk van de grootte; want als twee huizen overigens in gelijke omstandigheden verkeeren, zal voor het grootste huis meer huur betaald worden, dan voor het kleinste.

Is de afhankelijkheid van dien aard, dat het **eenige malen zoo groot** *worden van B ten gevolge heeft, dat A* **evenveel malen zoo groot** *wordt, dan zegt men, dat A* **recht evenredig afhankelijk** *is van B.*

Gewoonlijk zegt men kortweg: **A is recht evenredig met B. (R. E.).**

Koopt A b.v. drie Meter laken voor zekeren prijs, en B 15 Meter van dezelfde kwaliteit, dan moet B, omdat hij een vijfmaal zoo groote hoeveelheid gekocht heeft, ook een vijfmaal zoo hoogen prijs betalen.

Prijs en hoeveelheid zijn dus recht evenredige grootheden.

Stelt men nu den prijs, dien A betaalt voor door P_1 gld. en dien welken B besteedt door P_2 gld., de hoeveelheden die zij gekocht hebben respectievelijk door H_1 Meter en H_2 Meter, dan is;

$$P_1 = 5 \times P_2, \text{ dus } P_1 : P_2 = 5 : 1;$$
$$H_1 = 5 \times H_2, \text{ dus } H_1 : H_2 = 5 : 1;$$

waaruit dan volgt:

$$P_1 : P_2 = H_1 : H_2.$$

Als een kapitaal vijfmaal zoo groot is als een ander kapitaal, dan zal het eerste ook vijfmaal zooveel interest opbrengen als het tweede.

Kapitaal en interest zijn dus ook recht evenredige grootheden.

Digitized by Google

Uit $I_1 = 5 \times I_2$ en $K_1 = 5 \times K_2$,
volgt dan $I_1 : I_2 = 5 : 1$ en $K_1 : K_2 = 5 : 1$
dus ook: $I_1 : I_2 = K_1 : K_2$.

Als twee gelijke kapitalen gedurende een zelfden tijd uitstaan, doch het eerste tegen een tweemaal zoo hoog percent als het tweede, dan zal ook de interest van het eerste kapitaal tweemaal zoo groot zijn, als die van het tweede.

$$I_1 : I_2 = P_1 : P_2.$$

En eveneens zijn de interesten recht evenredig met de tijden:

$$I_1 : I_2 = T_1 : T_2.$$

162. Bij de beoordeeling, of twee grootheden A en B recht evenredig zijn, moet men de andere grootheden, die invloed kunnen hebben op de grootte van A, als standvastige grootheden beschouwen.

Voorbeelden van R. E. grootheden zijn:

1. *De prijs* eener koopwaar en *de hoeveelheid:*
$$P_1 : P_2 = H_1 : H_2.$$
2. *De weg*, die afgelegd wordt, en *de snelheid:*
$$W_1 : W_2 = S_1 : S_2.$$
3. *De weg*, die afgelegd wordt, en *de tijd:*
$$W_1 : W_2 = T_1 : T_2.$$
4. *De hoeveelheid werks*, die verricht wordt, en *het aantal arbeiders:*
$$W_1 : W_2 = A_1 : A_2.$$
5. *Het arbeidsloon* en *de duur van den werktijd:*
$$L_1 : L_2 = T_1 : T_2.$$
6. *De voorraad levensmiddelen* en *het aantal mannen*, die van dien voorraad moeten leven:
$$V_1 : V_2 = M_1 : M_2.$$

163. Voor de oplossing van vraagstukken is het noodzakelijk te kunnen beoordeelen, of grootheden recht evenredig afhankelijk zijn.

Voorbeelden.

1. *Indien men in* 2 *uur tijds* 11 *KM aflegt, hoeveel KM kan men dan in* 5 *uur afleggen?*

Oplossing.

Zij W_1 het aantal KM, dat men in T_1 uren kan afleggen, en W_2 het aantal KM, dat men in T_2 uren kan afleggen, dan heeft men

Digitized by Google

$$W_1 : W_2 = T_1 : T_2$$

of $$11 : W_2 = 2 : 5$$

$$2\,W_2 = 55$$

$$W_2 = 27\tfrac{1}{2}.$$

In 5 uur kan men dus $27\frac{1}{2}$ KM afleggen.

2. *Twee kapitalen zijn samen* 5000 *gld. groot en staan gedurende denzelfden tijd tegen hetzelfde percent uit. Het eerste brengt* 120 *gld. rente op, het tweede* 80 *gld. Hoe groot is elk kapitaal?*

Oplossing.

De kapitalen zijn R. E. met de interesten. Noemt men het aantal guldens van het eerste kapitaal en van den daarbij behoorenden interest respectievelijk K_1 en I_1, en van het tweede kapitaal en den tweeden interest K_2 en I_2, dan heeft men:

$$K_1 : K_2 = I_1 : I_2$$

$$K_1 : K_2 = 120 : 80$$

of herleid: $$K_1 : K_2 = 3 : 2. \qquad (1)$$

Van de kapitalen kent men echter behalve de verhouding ook nog de som.

Passen wij nu op evenredigheid (1) de eigenschap van § 146 toe, dan verkrijgt men:

$$(K_1 + K_2) : 5 = K_1 : 3$$

$$5000 : 5 = K_1 : 3$$

waaruit volgt: $$K_1 = 3000.$$

Het eerste kapitaal is dus groot 3000 gld. en het tweede 2000 gld.

---

164. *Als van twee grootheden A en B het* **eenige malen zoo groot** *worden van B ten gevolge heeft, dat A* **evenveel malen zoo klein** *wordt, dan heet A* **omgekeerd evenredig afhankelijk** *van B.*

Gewoonlijk zegt men kortweg: **A is omgekeerd evenredig met B. (O. E.).**

Zoo zijn snelheid en tijd omgekeerd evenredige grootheden. Immers als twee ruiters A en B een weg PQ moeten afleggen, en A rijdt tweemaal zoo snel als B, dan zal A over dien weg een tweemaal zoo korten tijd noodig hebben als B.

Stelt men het aantal minuten, dat A over dien weg noodig heeft voor door T_1 en het aantal Meters, dat hij per minuut aflegt door S_2, daarentegen het aantal minuten van B en diens snelheid door T_2 en S_2, dan volgt uit:

Digitized by Google

$$S_1 = 2S_2, \text{ dat } T_1 = \frac{1}{2}T_2 \text{ is,}$$

of $$S_1 : S_2, = 2 \text{ en } T_1 : T_2 = \frac{1}{2}, \text{ dus } T_2 : T_1 = 2;$$

derhalve : $$S_1 : S_2 = T_2 : T_1.$$

Deelt men de termen der laatste verhouding door $T_1 \times T_2$, dan verkrijgt men :

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{T_1} : \frac{1}{T_2}.$$

Als een kapitaal tegen een tweemaal zoo klein percent uitstaat als een ander, en toch per jaar evenveel interest oplevert, dan moet het eerste kapitaal tweemaal zoo groot zijn als het tweede.

Kapitaal en percent zijn dus omgekeerd evenredige grootheden.

Zijn de kapitalen K_1 gld. en K_2 gld. groot en de percenten P_1 en P_2, dan volgt uit $P_1 = \frac{1}{2}P_2$, dat $K_1 = 2 \times K_2$ is.

Hieruit volgt dan verder:

$$K_1 : K_2 = 2 \text{ en } P_1 : P_2 = \frac{1}{2} \text{ of } P_2 : P_1 = 2;$$

dus $$K_1 : K_2 = P_2 : P_1$$

of $$K_1 : K_2 = \frac{P_2}{P_1 \times P_2} : \frac{P_1}{P_1 \times P_2}$$

$$K_1 : K_2 = \frac{1}{P_1} : \frac{1}{P_2}.$$

165. Bij de beoordeeling, of twee grootheden A en B omgekeerd evenredig zijn, moet men de andere grootheden, die ook invloed hebben op de grootte van A, als standvastige grootheden beschouwen.

Voorbeelden van O. E. grootheden zijn:

1. *De hoeveelheid* koopwaar en *de prijs* per eenheid :

$$H_1 : H_2 = \frac{1}{P_1} : \frac{1}{P_2}.$$

2. *Het aantal dagen*, noodig om zekere som gelds te verdienen, en *het dagloon:*

$$D_1 : D_2 = \frac{1}{L_1} : \frac{1}{L_2}.$$

3. *Het aantal dagen*, noodig om zeker werk te verrichten, en *het aantal arbeiders:*

$$D_1 : D_2 = \frac{1}{A_1} : \frac{1}{A_2}.$$

Digitized by Google

4. *Het aantal dagen*, noodig om zeker werk te verrichten, en *het aantal uren* daags:

$$D_1 : D_2 = \frac{1}{U_1} : \frac{1}{U_2}.$$

5. *Het aantal arbeiders*, noodig om een werk te verrichten, en *hun kracht:*

$$A_1 : A_2 = \frac{1}{K_1} : \frac{1}{K_2}.$$

166. Voor het oplossen van vraagstukken is het noodzakelijk te kunnen beoordeelen, of grootheden omgekeerd evenredig afhankelijk zijn.

Voorbeelden.

1. *Een kapitaal van* 3000 *gld. wordt à* 5 % *uitgezet. Tegen welk* % *moet een kapitaal van* 4000 *gld. uitgezet worden, om in denzelfden tijd dezelfde rente op te leveren?*

Oplossing.

Is een kapitaal viermaal zoo groot als een ander, dan moet het eerste tegen een viermaal zoo klein percent uitstaan als het tweede om denzelfden interest op te leveren als het tweede.

De percenten zijn dus omgekeerd evenredig met de kapitalen. Stellen wij de percenten voor door P_1 en P_2 en de kapitalen door K_1 gld. en K_2 gld., dan heeft men dus:

$$P_1 : P_2 = \frac{1}{K_1} : \frac{1}{K_2}$$

of

$$5 : P_2 = \frac{1}{3000} : \frac{1}{4000}$$

$$5 : P_2 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} P_2 = \frac{5}{4}$$

$$P_2 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Het tweede kapitaal staat dus uit tegen $3\frac{3}{4}$ %.

2. *Eenige arbeiders kunnen een werk in* 16 *dagen klaar krijgen. Het moet reeds in* 12 *dagen klaar zijn, en nu moeten er nog* 10 *arbeiders aangesteld worden. Hoeveel arbeiders waren er eerst?*

Oplossing.

Aantal arbeiders en tijd zijn omgekeerd evenredige grootheden.

Digitized by Google

Stelt men 't aantal arbeiders der eerste ploeg door A_1 voor, het aantal dagen dat ze werken door D_1; evenzoo het aantal arbeiders der tweede ploeg door A_2 en het aantal dagen dat deze werken door D_2, dan heeft men:

$$A_1 : A_2 = \frac{1}{D_1} : \frac{1}{D_2}$$

$$A_1 : A_2 = \frac{1}{16} : \frac{1}{12}$$

of herleid: $A_1 : A_2 = 3 : 4.$

We weten echter, dat in de tweede ploeg 10 arbeiders meer zijn, dan in de eerste; passen we nu op de laatste evenredigheid de eigenschap van § 147 toe, dan krijgen we:

$$10 : 1 = A_1 : 3,$$

dus $A_1 = 30.$

De eerste ploeg bestond dus uit 30 arbeiders.

3. *Een stoomboot legt de reis van* A *naar* R *heen en terug af in* 19 *uur. Als zij in* R 5 *uur stil ligt en op de heenreis* 20 *KM, op de terugreis* 15 *KM per uur aflegt, hoe ver ligt* A *dan van* R?

Oplossing.

De tijden zijn O. E. met de snelheden. Stellen wij het aantal uren op de heenreis voor door U_1, dat op de terugreis door U_2, de snelheden respectievelijk door S_1 en S_2, dan hebben we:

$$U_1 : U_2 = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2}$$

$$U_1 : U_2 = \frac{1}{20} : \frac{1}{15}$$

of herleid: $U_1 : U_2 = 3 : 4$ (1)

Nu weten wij dat de heen- en terugreis in $19 - 5 = 14$ uren gedaan is, en uit (1) kunnen wij afleiden:

$$(U_1 + U_2) : 7 = U_1 : 3$$

of $14 : 7 = U_1 : 3,$

dan volgt hieruit $U_1 = 6$, zoodat de boot de heenreis aflegt in 6 uur, en daar zij per uur 20 KM aflegt, is de afstand van A tot R:

$$6 \times 20 \text{ KM} = 120 \text{ KM}.$$

Opgaven.

1. Als $7\frac{1}{2}$ KG koffie 4,50 gld. kosten, hoeveel moet men dan betalen voor 12 KG?

Digitized by Google

2. Een aannemer heeft 80 werklui in dienst, die allen evenveel per dag verdienen, en betaalt aan hen een weekloon van 976 gld. Hij neemt nog 20 werklui in dienst; hoeveel moet hij nu per week betalen?
3. Twee kapitalen verschillen 3000 gld. en staan tegen hetzelfde percent uit. Het eene brengt 72 gld. het andere in denzelfden tijd 180 gld. rente op. Hoe groot is elk kapitaal?
4. 20 werklieden kunnen per dag 800 M linnen van 45 ct. per M. weven. Hoeveel ontvangt de fabrikant per dag, indien hij nog 5 werklieden aanstelt?
5. Een fabrikant heeft stukken linnen van 40 M lengte en $\frac{3}{4}$ M breedte. Hij bevindt, dat stukken van $1\frac{1}{4}$ M breedte meer aftrek hebben. Hoe lang moet hij deze stukken maken, om ze tegen denzelfden prijs te kunnen leveren?
6. Twee kapitalen zijn samen 700 gld. groot. Het eerste brengt in 96 dagen evenveel interest op, als het tweede in 72 dagen. Hoe groot is elk kapitaal?
7. Twee even dure partijen aardappelen, samen 35 HL groot, zijn gekocht respectievelijk tegen $3\frac{1}{3}$ en $2\frac{1}{2}$ gld. per HL. Hoe groot is elke partij?
8. Een huisvrouw gebruikt in 4 maanden tijd 22 KG suiker van 24 ct. per KG. Hoeveel geld besteedt zij in $7\frac{1}{2}$ maand aan suiker.
9. A doet in 4 dagen, wat B in 6 dagen verricht. Als ze samen aan een werk 13,50 gld. verdienen, hoeveel komt dan aan elk toe?
10. Een KG koffie en een KG thee kosten samen 3,25 gld. Als 9 KG koffie even duur zijn als 4 KG thee, hoeveel kost dan 1 KG. van elke soort?

Samengesteld evenredige grootheden.

167. In het voorgaande hebben wij geleerd, dat kapitaal R. E. is met interest, indien tijd en percent dezelfde blijven.

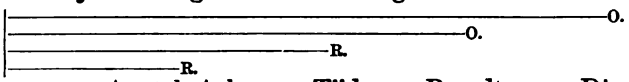
Kapitaal is O. E. met tijd, indien interest en percent dezelfde blijven, en O. E. met percent, indien interest en tijd dezelfde blijven.

Men noemt nu Kapitaal **samengesteld evenredig** met interest, percent en tijd.

Vergelijkt men in de volgende rij evenredige grootheden: lengte, breedte, diepte, aantal arbeiders en tijd, de eerstgenoemde groot-

Digitized by Google

heid met elk der andere, dan blijkt, dat zij R. E. is met aantal arbeiders en tijd en omgekeerd evenredig met breedte en diepte:



Lengte, Aantal Arb., Tijd, Breedte, Diepte.

Ook nu noemt men lengte samengesteld evenredig met breedte, diepte, aantal arbeiders en tijd.

Bepaling. *Men zegt, dat een grootheid* **samengesteld evenredig** *is met eenige andere, als zij òf recht evenredig is met al de andere, òf omgekeerd evenredig met al de andere, òf recht evenredig met eenige dier grootheden en omgekeerd evenredig met de overige.*

168. Vraagstuk. *Als* 20 *arbeiders in* 56 *dagen een sloot kunnen graven van* 84 *M lengte,* 2 *M breedte en* $1\frac{1}{2}$ *M diepte, hoe lang is dan de sloot, die* 2 *M breed en* $1\frac{1}{4}$ *M diep moet worden, en die door* 25 *arbeiders in* 48 *dagen kan gegraven worden?*

Oplossing.

Wij zullen achtereenvolgens breedte, diepte, aantal arbeiders en tijd laten veranderen en nagaan, welken invloed deze veranderingen op de lengte hebben.

De eerste sloot heeft een lengte van 84 M, een breedte van 2 M, een diepte van $1\frac{1}{2}$ M., en kan door 20 arbeiders in 56 dagen gegraven worden.

Geven we de sloot een breedte van 3 M, dan wordt deze grootheid met $\frac{3}{2}$ vermenigvuldigd. Daar lengte O. E. is met breedte, wordt de lengte door $\frac{3}{2}$ gedeeld, en dus 84 M : $\frac{3}{2}$ of $\frac{2}{3} \times 84$ M $= 56$ M. Derhalve:

Een sloot die 3 M breed is, $1\frac{1}{2}$ M diep, en die door 20 arbeiders in 56 dagen kan gegraven worden, is 56 M lang.

Geven we deze sloot een diepte van $2\frac{1}{2}$ M, dan wordt deze grootheid met $\frac{5}{6}$ vermenigvuldigd. Daar lengte O. E. is met diepte, wordt de lengte door $\frac{5}{6}$ gedeeld en dus 56 M : $\frac{5}{6}$ of $\frac{6}{5} \times 56$ M $=$ $= 67{,}2$ M. Derhalve:

Reg. 3 Vraagst. 168 te lezen als volgt:

lang is dan de sloot, die **3** *M. breed enz.*

Digitized by Google

Een sloot, die 3 M breed is, $1\frac{1}{4}$ M diep, en die door 20 arbeiders in 56 dagen kan gegraven worden, is 67,2 M lang.

Laten wij nu 25 in plaats van 20 arbeiders aan de sloot werken, dan wordt het aantal aantal arbeiders $\frac{25}{20}$ of $\frac{5}{4}$ maal zoo groot. Daar lengte R. E. is met aantal arbeiders, wordt de lengte daardoor $\frac{5}{4}$ maal zoo groot en dus $\frac{5}{4} \times 67{,}2\ \text{M} = 84\ \text{M}$. Derhalve:

Een sloot, die 3 M breed is, $1\frac{1}{4}$ M diep, en die door 25 arbeiders in 56 dagen kan gegraven worden, is 84 M. lang.

Veranderen wij ten slotte het aantal dagen in 48, dan wordt de tijd $\frac{48}{56}$ of $\frac{6}{7}$ van den oorspronkelijken tijd. Daar lengte en tijd R. E. zijn, wordt de lengte $\frac{6}{7} \times 84\ \text{M} = 72\ \text{M}$. Derhalve:

Een sloot, die 3 M breed is, $1\frac{1}{4}$ M diep, en die door 25 arbeiders in 48 dagen kan gegraven worden, is 72 M lang.

Overzicht.

Breedte.	Diepte.	Arbeiders.	Tijd.	Lengte.
2 M	$1\frac{1}{2}$ M.	20	56 dg.	84 M.
3 M	$1\frac{1}{2}$ M	20	56 dg.	$\frac{2}{3} \times 84\ \text{M} = 56\ \text{M}$.
3 M	$1\frac{1}{4}$ M	20	56 dg.	$\frac{6}{5} \times 56\ \text{M}. = 67{,}2\ \text{M}$.
3 M	$1\frac{1}{4}$ M	25	56 dg.	$\frac{5}{4} \times 67{,}2\ \text{M} = 84\ \text{M}$.
3 M	$1\frac{1}{4}$ M	25	48 dg.	$\frac{6}{7} \times 84\ \text{M} = 72\ \text{M}$.

169. Wij zullen nu de getallen van het voorgaande vraagstuk vervangen door letters, en trachten de samengesteld evenredig-afhankelijkheid uit te drukken.

Vraagstuk. *Als* L_1 *M de lengte eener sloot is, die* B_1 *M breed is,* D_1 *M diep, en die door* A_1 *arbeiders in* T_1 *dagen kan voltooid worden, hoe lang is dan de lengte* L_2 *eener sloot, die* B_2 *M breed*

Digitized by Google

is, D_2 M diep, en die door A_2 arbeiders in T_2 dagen kan voltooid worden?

Oplossing.

Als de breedte B_1 M is, de diepte D_1 M, het aantal arbeiders A_1, en het aantal dagen T_1, dan is de lengte L_1 M.

Men verandert nu eerst de breedte B_1 M in B_2 M en laat de andere grootheden onveranderd. Omdat lengte en breedte omgekeerd evenredig zijn, zal het getal, waarmede L_1 vermenigvuldigd moet worden, het omgekeerde zijn van het getal, waarmede B_1 vermenigvuldigd is; nl. $\frac{B_2}{B_1}$. De lengte wordt dus $\frac{B_1}{B_2} \times L_1$ M. (1)

Men verandert daarna alleen de diepte D_1 M in D_2 M, en laat de andere grootheden onveranderd. Omdat lengte en diepte omgekeerd evenredig zijn, zal het getal, waarmede de lengte vermenigvuldigd moet worden, het omgekeerde zijn van het getal waarmede D_1 vermenigvuldigd is, nl. $\frac{D_2}{D_1}$. De lengte (1) wordt dus $\frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times L_1$ M. (2)

Men verandert nu alleen A_1 in A_2 en laat de andere grootheden onveranderd. Daar lengte en aantal arbeiders recht evenredig zijn, zal het getal, waarmede de lengte vermenigvuldigd moet worden, hetzelfde zijn als het getal, waarmede A_1 vermenigvuldigd is, nl. $\frac{A_2}{A_1}$. De lengte (2) wordt dus $\frac{A_2}{A_1} \times \frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times L_1$ M. (3)

Ten slotte verandert men T_1 in T_2 en laat de andere grootheden onveranderd. Daar lengte en tijd recht evenredig zijn en T_1 met $\frac{T_2}{T_1}$ vermenigvuldigd is, wordt de lengte (3) met hetzelfde getal vermenigvuldigd, en wordt dus:

$$\frac{T_2}{T_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times L_1 \text{ M.} \qquad (4)$$

Overzicht.

Breedte.	Diepte.	Arbeiders.	Tijd.	Lengte.
B_1	D_1	A_1	T_1	L_1.
B_2	D_1	A_1	T_1	$\frac{B_1}{B_2} \times L_1$.
B_2	D_2	A_1	T_1	$\frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times L_1$.
B_2	D_2	A_2	T_1	$\frac{A_2}{A_1} \times \frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times L_1$.
B_2	D_2	A_2	T_2	$\frac{T_2}{T_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times L_1$.

Digitized by Google

Als echter B_1 veranderd is in B_2, D_1 in D_2, A_1 in A_2 en T_1 in T_2 is de lengte L_2 M geworden, en men heeft dus:

$$\frac{T_2}{T_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times L_1 = L_2.$$

Deelt men hiervan beide leden door L_2, dan verkrijgt men:

$$\frac{T_2}{T_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2} \times \frac{L_1}{L_2} = 1.$$

Ten einde de grootheden L_1 en L_2 alleen in het eerste lid te behouden, moet men beide leden deelen door: $\frac{T_2}{T_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{D_1}{D_2} \times \frac{B_1}{B_2}$ en verkrijgt dan:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1}{T_2} \times \frac{A_1}{A_2} \times \frac{D_2}{D_1} \times \frac{B_2}{B_1},$$

of

$$L_1 : L_2 = \frac{T_1 \times A_1}{D_1 \times B_1} \times \frac{D_2 \times B_2}{T_2 \times A_2},$$

of

$$L_1 : L_2 = \frac{T_1 \times A_1}{D_1 \times B_1} : \frac{T_2 \times A_2}{D_2 \times B_2}.$$

Opmerking. Deze evenredigheid stelt ons in staat, onmiddellijk te berekenen, waaraan een grootheid gelijk wordt, wanneer gegeven is, hoe eenige andere grootheden, waarmede zij samengesteld evenredig is, veranderen.

Men merke op, dat in den derden term van de laatste evenredigheid alleen grootheden voorkomen met 1 accent, en in den vierden term alleen grootheden met 2 accent.

In den teller van den derden en vierden term staat het produkt der grootheden, waarmede L recht evenredig is, in den noemer van die termen het produkt der grootheden, waarmee L omgekeerd evenredig is.

170. Ter toepassing van de samengesteld-evenredigheid volgt hier een voorbeeld.

Vraagstuk. *Als* 9 *wevers in* 18 *dagen*, 10 *uren per dag werkende*, 84 *stukken linnen kunnen weven van* 30 *M lengte en* $1\frac{1}{2}$ *M breedte, hoeveel wevers kunnen dan in* 30 *dagen* 9 *uur per dag werkende*, 210 *stukken linnen weven van* 36 *M lengte en* $1\frac{1}{3}$ *M breedte?*

Verklaring.

Er wordt gevraagd naar een aantal wevers.

Digitized by Google

Vergelijken we daarom het aantal wevers met het aantal dagen, uren daags, stukken en met lengte en breedte der stukken:

Hoe meer wevers er zijn, hoe minder dagen er gewerkt behoeft te worden. (O. E.).[1])

Hoe meer wevers er zijn, hoe minder uren daags er gewerkt behoeft te worden. (O. E.).

Hoe meer wevers er zijn, hoe meer stukken er geweven kunnen worden (R. E).

Hoe meer wevers er zijn, hoe langer de stukken worden (R. E.).

Hoe meer wevers er zijn, hoe breeder de stukken worden (R. E.).

Stellen we nu het aantal wevers der eerste ploeg voor door A_1, het aantal dagen en uren, dat zij werken, door D_1 en U_1, het aantal stukken en de lengte en breedte van elk stuk door S_1, L_1 en B_1, en de daarmee overeenkomende grootheden van de tweede ploeg door A_2, D_2, U_2, S_2, L_2 en B_2, dan hebben we:

$$A_1 : A_2 = \frac{S_1 \times L_1 \times B_1}{D_1 \times U_1} : \frac{S_2 \times L_2 \times B_2}{D_2 \times U_2}.$$

Wij schrijven het voorgaande kortweg:

					R.
				R.	
			R.		
		O.			
O.					
A	D	U	S	L	B
9	18	10	84	30	$1\frac{1}{2}$
?	30	2	210	36	$1\frac{1}{3}$

$$A_1 : A_2 = \frac{S_1 \times L_1 \times B_1}{D_1 \times U_1} : \frac{S_2 \times L_2 \times B_2}{D_2 \times U_2},$$

of

$$9 : A_2 = \frac{84 \times 30 \times 1\frac{1}{2}}{18 \times 10} : \frac{210 \times 36 \times 1\frac{1}{3}}{30 \times 9}.$$

Hieruit vinden we $A_2 = 16$.

Dus kunnen 16 wevers in 30 dagen, 9 uur per dag werkende, 210 stukken linnen weven, van 36 M lengte en $1\frac{1}{3}$ M breedte.

171. Als L_1 M de lengte eener sloot is, die B_1 M breed is, D_1 M. diep, en die door A_1 arbeiders in T_1 dagen gegraven kan

[1]) De uitdrukking „Hoe meer . . . ., hoe minder . . . ." moet eigenlijk gelezen worden: „Zooveel malen meer . . . ., evenveel malen minder . . . ."

Digitized by Google

worden, terwijl L_2 M de lengte eener sloot is, die B_2 M breed is, D_2 M diep en die door A_2 arbeiders in T_2 dagen gegraven kan worden, dan bestaat tusschen deze grootheden de volgende betrekking.

$$L_1 : L_2 = \frac{T_1 \times A_1}{B_1 \times D_1} : \frac{T_2 \times A_2}{B_2 \times D_2}. \quad (1)$$

Op dezelfde wijze beredeneert men:

Als L_3 M de lengte eener sloot is, die B_3 M breed is, D_3 M diep en die door A_3 arbeiders in T_3 dagen gegraven kan worden, dan bestaat tusschen de getallen met 1 accent en 3 accent de volgende betrekking:

$$L_1 : L_3 = \frac{T_1 \times A_1}{B_1 \times D_1} : \frac{T_3 \times A_3}{B_3 \times D_3}, \quad (2)$$

waaruit in verband met (1) volgt:

$$L_1 : L_2 : L_3 = \frac{T_1 \times A_1}{B_1 \times D_1} : \frac{T_2 \times A_2}{B_2 \times D_2} : \frac{T_3 \times A_3}{B_3 \times D_3}.$$

Toepassing.

Drie kapitalen staan 5, 4 *en* 6 *maanden uit en wel respectievelijk tegen* 4, 5 *en* 3%. *Hunne interesten verhouden zich als de getallen* 4, 5 *en* 6. *Als het derde kapitaal* 7200 *gld. grooter is dan het eerste, hoe groot is dan elk kapitaal?*

Oplossing.

Daar kapitaal recht evenredig is met interest en omgekeerd evenredig met tijd en percent, heeft men de evenredigheid:

$$K_1 ; K_2 : K_3 = \frac{I_1}{T_1 \times P_1} : \frac{I_2}{T_2 \times P_2} : \frac{I_3}{T_3 \times P_3}.$$

Daar het, om de verhouding der kapitalen te vinden, onverschillig is, of men de interesten noemt 4×10, 5×10 en 6×10 of 4×3, 5×3 en 6×3 of $4a$, $5a$ en $6a$ (waarom is dit onverschillig?), zullen wij de interesten aangeven door de eenvoudigste geheele getallen 4, 5 en 6:

$$K_1 : K_2 : K_3 = \frac{4}{5 \times 4} : \frac{5}{4 \times 5} : \frac{6}{6 \times 3}$$

$$K_1 : K_2 : K_3 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3},$$

of, indien men alle termen der verhouding met 60 vermenigvuldigt:

$$K_1 : K_2 : K_3 = 12 : 15 : 20.$$

Digitized by Google

Hieruit volgt dus $K_3 = \frac{5}{3} K_1$

$K_1 = K_1$

af

dus $7200 \text{ gld.} = \frac{2}{3} K_1$

waaruit volgt $K_1 = 10800 \text{ gld.}$

en dus $K_2 = 13500 \text{ gld.}$

$K_3 = 18000 \text{ gld.}$

Opgaven.

1. Een fabrikant heeft 40 man werkvolk en betaalt in 6 weken 2700 gld. loon. Hoeveel moet hij aan 50 man in 8 weken betalen?
2. Een koopman betaalt voor 280 balen koffie, die hij 8 md. in pakhuis laat liggen, 120 gld. pakhuishuur. Later laat hij een partij een jaar lang liggen en betaalt 225 gld. pakhuishuur. Hoe groot is deze partij?
3. Een goederentrein legt met een snelheid van 25 KM per uur in 2 uur en 40 min. een afstand AB af. Met welke snelheid legt een sneltrein in $2\frac{1}{2}$ uur een driemaal zoo grooten weg PQ af?
4. Voor het vervoer van 5 HL over een weg van 300 KM betaalt men 2,25 gld. aan vracht. Hoeveel moet men betalen, voor het vervoer van 4 HL over een weg van 400 KM?
5. Vijf pompen kunnen in 60 dg. 10 uur per dag werkende, een meer leegpompen. Hoeveel pompen, die $1\frac{1}{2}$ maal zoo sterk werken als de eerste, moeten geplaatst worden, om in 50 dg., 8 uur per dag werkende, het meer leeg te pompen?
6. Om een berg zand weg te halen, moet een aannemer 10 weken lang, 6 dagen per week, 12 malen per dag een trein laten loopen van 50 waggons. Hoeveel weken zal het duren, als hij per week slechts 5 dg. laat werken, het aantal waggons van elken trein met 10 vermindert en 2 keeren per dag minder laat rijden?
7. Een kapitaal van 6000 gld. brengt à 4 % in zekeren tijd $1\frac{3}{5}$ maal zooveel rente op als een kapitaal van 5000 gld. à $4\frac{1}{2}$ % in een anderen tijd. Hoe verhouden zich de tijden?
8. De inhouden van twee rechthoekige bakken staan tot elkaar als 3 : 4. De grootste bak is lang 0,12 DM, breed 8 dM en diep 55 cM. De kleinste bak is $\frac{1}{5}$ korter, maar 0,3 M breeder. Hoeveel cM is deze diep?

Digitized by Google

9. Een garnizoen is voor 10 maanden van levensmiddelen voorzien, als elk soldaat per dag $1\frac{1}{2}$ KG krijgt. Er komt een versterking van 2000 man, en nu is de voorraad slechts voldoende voor 9 maanden, als elk per dag 1 KG ontvangt. Hoe groot was het garnizoen oorspronkelijk?
10. Een wever gebruikt voor het vervaardigen van 3 stukken katoen van 12 M lengte en $1\frac{1}{2}$ M breedte, $7\frac{1}{2}$ KG van 1,20 gld. per KG. Hoeveel kosten hem 5 stukken katoen van 16 M lengte en $1\frac{3}{4}$ M breedte, als hij in het eerste geval vierdradig garen gebruikt en in het tweede geval driedradig garen?
11. Een vesting heeft een garnizoen van 10000 man. Voor 8 maanden zijn zij van levensmiddelen voorzien. Na 3 maanden vertrekken 4000 man, en eenigen tijd later komen er 5000 man bij. Wanneer zijn deze gekomen, als men weet, dat na hun komst de proviand nog 2 maanden strekken kan?
12. Om een plas leeg te pompen, van a M lengte en b M breedte, hebben c pompen, die elk d M^3 per minuut leegpompen, e dagen werk. In hoeveel dagen kan een plas leeggepompt worden, die m M lang is, n M breed en tweemaal zoo diep als de eerste, indien nu p pompen geplaatst worden, die elk q M^3 per minuut leegpompen?
13. Als 48 arbeiders in 6 weken van 5 dagen, per dag 12 uren werkende, een werk kunnen maken, hoeveel weken zullen dan 60 werklieden, wier krachten $\frac{4}{5}$ van die der eersten zijn, behoeven voor een werk, dat 1,3 maal tijdroovender is, als zij per week 6 dagen van 8 uren werken?
14. Als een garnizoen van M_1 manschappen T_1 dagen lang met een voorraad toekomt, indien elk per dag R_1 KG ontvangt, terwijl een garnizoen van M_2 manschappen T_2 dagen lang met denzelfden voorraad toekomt, indien elk per dag R_2 KG ontvangt, en een garnizoen van R_3 manschappen T_3 dagen lang met denzelfden voorraad toekomt, indien elk per dag R_3 KG ontvangt, hoe verhouden zich dan M_1, M_2 en M_3?
15. Vier kapitalen K_1, K_2, K_3 en K_4, die respectievelijk gedurende T_1, T_2, T_3 en T_4 maanden tegen P_1, P_2, P_3 en P_4 percent uitstaan, werpen respectievelijk renten af, die zich verhouden als de getallen I_1, I_2, I_3 en I_4. Hoe verhouden zich K_1, K_2, K_3 en K_4?
16. Een graanhandelaar koopt drie partijen rogge, samen groot $125\frac{1}{4}$ HL, respectievelijk tegen 7,50 gld., 8 gld. en 8,25 gld. per HL en betaalt voor elke partij evenveel. Indien hij de

Digitized by Google

geheele hoeveelheid verkoopt voor 1039,50 gld., hoeveel percent wint hij dan?

---

172. Het komt nog al eens voor, dat de betrekking tusschen eenige veranderlijke grootheden wordt aangegeven door een gelijkheid. Wanneer men dan de afhankelijkheid van een der veranderlijke grootheden tot de andere wil onderzoeken, drukt men de eerste grootheid in de andere uit.

Voorbeelden.

1. *Tusschen de veranderlijke grootheden A, B, C en D bestaat de betrekking $5AB = 3CD$. Hoe is A afhankelijk van B, C, en D?*

Oplossing.

Uit $5AB = 3CD$ volgt.

$$A = \frac{3CD}{5B}.$$

Wordt C nu met een getal vermenigvuldigd, dan wordt de breuk ook met dat getal vermenigvuldigd en dus A eveneens, indien B en D onveranderd blijven. A is dus R. E. met C.

Eveneens blijkt, dat A R. E. is met D.

Wordt echter B met een getal vermenigvuldigd, dan wordt de breuk door dat getal gedeeld en dus A eveneens.

A is dus O. E. met B.

2. *Hoe is A afhankelijk van B, C en D, indien $A = \frac{BC}{D^2}$ is?*

Oplossing.

Door een redeneering, geheel overeenkomende met die van het voorgaande voorbeeld, toont men aan, dat A recht evenredig is met B en C.

Wordt echter D met een getal vermenigvuldigd, dan wordt de breuk door het vierkant van dat getal gedeeld en dus A ook. Men drukt dit uit door te zeggen, dat A **omgekeerd evenredig is met het vierkant van** D.

3. *Welke betrekking bestaat er tusschen L en de grootheden T en G, indien $T = p\sqrt{\frac{L}{G}}$ is?* (p is een standvastig getal).

Digitized by Google

Oplossing.

Men drukt eerst L uit in T *en* G.

Uit $T = p\sqrt{\frac{L}{G}}$ volgt: $T^2 = \frac{p^2 L}{G}$; dus $L = \frac{GT^2}{p^2}$,

waaruit men afleidt, dat L recht evenredig is met G en met het vierkant van T.

Indien men de grootheid, waarvan men de afhankelijkheid wil onderzoeken, uitgedrukt heeft in de andere grootheden, kan het gebeuren, dat men een vorm gevonden heeft met sommen en verschillen. Er bestaat dan geen evenredige afhankelijkheid tusschen de eerste grootheid en elk der andere.

Zoo volgt uit $A = 5BC + 3CD - 4CE$

of $A = C(5B + 3D - 4E)$,

dat A recht evenredig is met C en ook recht evenredig met $5B + 3D - 4E$, maar niet met B, D en E afzonderlijk.

Opgaven.

1. Indien gegeven is $A = \frac{3BC}{5DE}$, welke betrekking bestaat er dan tusschen A en de overige grootheden,
   „ B „ „ „ „
   „ D „ „ „ „
2. Beantwoord dezelfde vragen, indien $A = \frac{3\sqrt{BC}}{4D^2E}$ is.
3. Welke betrekking bestaat er tusschen A en de andere grootheden, indien:
   $3AB - 5AC = 4B^2$ is?

Digitized by Google

KETTINGREGEL.

173. Indien gevraagd wordt, hoeveel eenheden van zekere soort gelijk zijn aan een gegeven aantal eenheden eener tweede soort, terwijl gegeven is, hoeveel eenheden der tweede soort gelijk zijn aan een gegeven aantal eenheden eener derde soort, verder hoeveel eenheden der derde soort gelijk zijn aan een gegeven aantal eenheden eener vierde soort, enz. en ten slotte hoeveel eenheden der laatste soort gelijk zijn aan een gegeven aantal eenheden der eerste soort, dan kan men dit vraagstuk oplossen volgens den **kettingregel.**

Vraagstuk. *Hoeveel kosten* 5 *KG thee, als* 7 *KG thee even duur zijn als* 8 *KG koffie,* 10 *KG koffie even duur als* 21 *KG suiker,* 20 *KG suiker even duur als* 14 *KG tabak, en als* 30 *KG tabak* 16 *gld. kosten?*

Oplossing.

We schrijven de gelijkheden op, te beginnen met het gevraagde aantal guldens, zorg dragende, dat elke grootheid, die in eene gelijkheid rechts van het gelijkteeken voorkomt, in de volgende gelijkheid links van het gelijkteeken staat.

$$x \text{ gld.} = 5 \text{ KG thee}$$
$$7 \text{ KG thee} = 18 \text{ KG koffie}$$
$$10 \text{ KG koffie} = 21 \text{ KG suiker}$$
$$20 \text{ KG suiker} = 14 \text{ KG tabak}$$
$$30 \text{ KG tabak} = 16 \text{ gld.}^{1}).$$

Op die wijze zijn wij geeindigd met de grootheid guldens, waarmede wij ook begonnen zijn.

Daar 30 KG tabak 16 gld. kosten, zullen 14 KG. kosten $\frac{14}{30} \times 16$

[1]) De gelijkteekens vatte men op in de beteekenis van: *„zijn in waarde gelijk aan"*.

Digitized by Google

gld.; dus kosten 20 KG suiker ook $\frac{14}{30} \times 16$ gld.

21 KG suiker kosten dus $\frac{21}{20} \times \frac{14}{30} \times 16$ gld.; dus kosten 10 KG koffie ook $\frac{21}{20} \times \frac{14}{30} \times 16$ gld.

18 KG koffie kosten dus $\frac{18}{10} \times \frac{21}{20} \times \frac{14}{30} \times 16$ gld.; dus 7 KG thee kosten ook $\frac{18}{10} \times \frac{21}{20} \times \frac{14}{30} \times 16$ gld.

5 KG thee kosten dus $\frac{5}{7} \times \frac{18}{10} \times \frac{21}{20} \times \frac{14}{30} \times 16$ gld.

zoodat het gevraagde aantal guldens bedraagt:

$$x = \frac{5}{7} \times \frac{18}{10} \times \frac{21}{20} \times \frac{14}{30} \times 16. \qquad (1)$$

of $x = 10{,}80$.

Opmerkingen.

1°. De gelijkheid (1) kan men ook schrijven:

$$x \times 7 \times 10 \times 20 \times 30 = 5 \times 18 \times 21 \times 14 \times 16,$$

waaruit volgt de **kettingregel:**

Het produkt van de getallen links van de gelijkteekens is gelijk aan het produkt van de getallen rechts van de gelijkteekens.

2°. Het is niet noodzakelijk, dat elke grootheid, die rechts van het gelijkteeken voorkomt, in de volgende gelijkheid links van het gelijkteeken staat. Men kan de gelijkheden in willekeurige volgorde plaatsen, mits men er voor zorgt, dat elke grootheid in de eene gelijkheid links en in de andere rechts van het gelijkteeken staat.

3°. Ook als volgt had men het bewijs voor den kettingregel kunnen geven:

Stel dat 1 KG thee a gld. kost, 1 KG koffie b gld., 1 KG suiker c gld. en 1 KG tabak d gld., dan zouden wij de volgende gelijkheden hebben:

$$\begin{aligned} x \text{ gld.} &= 5a \text{ gld.}; && \text{dus ook} && x = 5a. \\ 7a \text{ gld.} &= 18b \text{ gld.}; && \text{„} && 7a = 18b. \\ 10b \text{ gld.} &= 21c \text{ gld.}; && \text{„} && 10b = 21c. \\ 20c \text{ gld.} &= 14d \text{ gld.}; && \text{„} && 20c = 14d. \\ 30d \text{ gld.} &= 16 \text{ gld.}; && \text{„} && 13d = 16. \end{aligned}$$

Na vermenigvuldiging ontstaat:

$$x \times 7a \times 10b \times 20c \times 30d = 5a \times 18b \times 21c \times 14d \times 16$$

Digitized by Google

of, indien men beide gelijkheden door $abcd$ deelt:

$$x \times 7 \times 10 \times 20 \times 30 = 5 \times 18 \times 21 \times 14 \times 16.$$

4°. Men kan de bewerking bekorten, door de getallen, die links en rechts van de gelijkteekens staan, door een gemeenschappelijken factor te deelen.

De bewerking schrijft men gewoonlijk op, met weglating van de namen links behalve bij het eerste getal.

Opgaven.

1. Tien koeien eten in 5 maanden voor 168 gld. hooi op. Voor hoeveel geld hooi moet men koopen, om 6 paarden gedurende denzelfden tijd te voeden, als 4 paarden evenveel eten als 7 koeien?
2. Welke is de werkelijke waarde van een Louis d'or (20 francs in goud), als 155 louis d'or 9 HG fijn goud bevatten en het gouden tientje 6,048 G fijn goud bevat?
3. Bereken ook de werkelijke waarde van een Doppelkrone (20 Mark), als 5580 Mark 2 KG fijn goud bevatten.
4. In Londen kosten 9 yards linnen $10\frac{1}{2}$ shilling. Hoeveel kosten 8 M te Amsterdam, indien 32 M gelijk zijn aan 35 yards en 20 shillings betaald worden met 12,09 gld.?

Digitized by Google

GEZELSCHAPSREGEL.

174. Vraagstuk. *Drie knapen mogen* 108 *knikkers zoo verdeelen, dat de deelen zich verhouden als de getallen* 2, 3 *en* 4. *Hoeveel krijgt elk?*

Oplossing.

De eerste jongen krijgt 2 maal, de tweede 3 maal, de derde 4 maal een zeker aantal knikkers. Samen dus 9 maal dat aantal. Hieruit volgt, dat de eerste het $\frac{2}{9}$ deel, de tweede het $\frac{3}{9}$ deel en de derde het $\frac{4}{9}$ deel van 108 knikkers krijgt, of 24, 36 en 48 knikkers.

Uit bovenstaand vraagstuk blijkt:

Om het aandeel van den eersten knaap te bepalen, moet de eerste term (2) vermenigvuldigd worden met het quotient van het te verdeelen getal (108) en de som van de termen der verhouding $(2+3+4)$.

Het deel van den tweeden wordt verkregen door den tweeden term met hetzelfde quotient te vermenigvuldigen, enz.

Is dus het te verdeelen getal G, en zijn de termen der verhouding a, b en c, dan is:

het eerste deel $\frac{aG}{a+b+c}$,

het tweede „ $\frac{bG}{a+b+c}$,

het derde „ $\frac{cG}{a+b+c}$.

Dit had men ook met behulp van de eigenschap der aaneengeschakelde evenredigheden kunnen afleiden.

Noem daartoe de gevraagde getallen respectievelijk A, B en C, dan heeft men:

$$A:B:C=a:b:c,$$

Digitized by Google

en dus ook $(A+B+C):(a+b+c)=A:a=B:b=C:c$.

Daar $A+B+C$ het te verdeelen getal G is, heeft men:

$$G:(a+b+c)=A:a=B:b=C:c,$$

waaruit volgt: $A=\frac{aG}{a+b+c}$, $B=\frac{bG}{a+b+c}$, $C=\frac{cG}{a+b+c}$.

175. Uit het voorgaande blijkt, dat men de gevraagde getallen onmiddellijk kan opschrijven, indien hun som en hun verhouding gegeven is.

De termen der verhouding zijn echter niet altijd gegeven; dikwijls moet men ze uit de gegevens afleiden.

Wij zullen dit door eenige voorbeelden toelichten.

1. *Drie kapitalen, samen* 9000 *gld. groot, staan gelijken tijd uit tegen hetzelfde percent. Ze brengen respectievelijk* 100, 120 *en* 140 *gld. rente op. Hoe groot zijn de kapitalen?*

Oplossing.

Daar de kapitalen recht evenredig zijn met de renten (de tijd verandert niet en evenmin het percent), zullen de kapitalen zich verhouden als de getallen 100, 120 en 140 of als de getallen 5, 6 en 7.

Van de drie kapitalen is dus bekend de som (9000 gld.) en de verhouding (5 : 6 : 7), waaruit volgt:

$$\text{eerste kapitaal}=\frac{5\times 9000\text{ gld.}}{5+6+7}=2500\text{ gld.},$$

$$\text{tweede kapitaal}=\frac{6\times 9000\text{ gld.}}{5+6+7}=3000\text{ gld.},$$

$$\text{derde kapitaal}=\frac{7\times 9000\text{ gld.}}{5+6+7}=3500\text{ gld.}$$

2. *Iemand koopt drie verschillende soorten van aardappelen, van elk* 1 *HL, samen voor* 10,25 *gld. Als* $8\frac{3}{4}$ *HL van de eerste soort evenveel kosten als* $7\frac{1}{2}$ *HL van de tweede soort en deze weer evenveel als* 7 *HL van de derde soort, hoeveel kost dan* 1 *HL van elke soort?*

Oplossing.

Wanneer eenige partijen aardappelen even duur zijn, zullen de prijzen per HL omgekeerd evenredig zijn met de aantallen HL, waaruit elke partij bestaat.

Digitized by Google

De prijzen per HL zijn dus omgekeerd evenredig met de getallen $8\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 7; ze verhouden zich dus als de getallen $\frac{1}{8\frac{3}{4}}$, $\frac{1}{7\frac{1}{2}}$ en $\frac{1}{7}$,

of als $\frac{4}{35}$, $\frac{2}{15}$ en $\frac{1}{7}$,

of als 12, 14 en 15,

en daar de som der prijzen 10,25 gld. is, is de prijs van:

1 HL der eerste soort $\frac{12 \times 10{,}25 \text{ gld.}}{12 + 14 + 15} = 3$ gld.

1 HL der tweede soort $\frac{14 \times 10{,}25 \text{ gld.}}{12 + 14 + 15} = 3{,}5$ gld.

1 HL der derde soort $\frac{15 \times 10{,}25 \text{ gld.}}{12 + 14 + 15} = 3{,}75$ gld.

3. *Drie kapitalen, samen* 7440 *gld. groot, staan respectievelijk tegen* 5, $4\frac{1}{2}$ *en* 4 % *uit gedurende tijden, die zich verhouden als de getallen* 3, 4 *en* 5. *Zij brengen respectievelijk* 45, 60 *en* 80 *gld. rente op. Hoe groot is elk kapitaal?*

Oplossing.

Daar de kapitalen recht evenredig zijn met de renten en omgekeerd evenredig met de tijden en percenten, verhouden de kapitalen zich als de getallen (zie § 171 Toepassing).

$$\frac{45}{3 \times 5}, \quad \frac{60}{4 \times 4\frac{1}{2}} \text{ en } \frac{80}{5 \times 4},$$

of als 3, $3\frac{1}{3}$ en 4, d. i. als 9 : 10 : 12;

en daar de som der kapitalen 7440 gld. is,

is het eerste kapitaal $\frac{9 \times 7440 \text{ gld.}}{9 + 10 + 12} = 2160$ gld.

het tweede kapitaal $\frac{10 \times 7440 \text{ gld.}}{9 + 10 + 12} = 2400$ gld.

het derde kapitaal $\frac{12 \times 7440 \text{ gld.}}{9 + 10 + 12} = 2880$ gld.

4. A, B *en* C *handelen samen.* A *legt* 3000 *gld. in en* B *en* C *samen* 4500 *gld. Het geld van* A *is* 4, *dat van* B 6 *en dat van*

Digitized by Google

C 9 *maanden in den handel. De geheele winst bedraagt* 925 *gld., waarvan* B *evenveel krijgt als* C. *Hoeveel krijgt elk?*

Oplossing.

Daar B en C evenveel winst genieten, zijn hun kapitalen omgekeerd evenredig met de tijden, gedurende welken zij uitstaan [1]).

Men heeft dus $K_B : K_C = \frac{1}{6} : \frac{1}{9}$,

of $K_B : K_C = 3 : 2$,

en daar B en C samen 4500 gld. ingelegd hebben,

$$\text{is } K_B = \frac{3 \times 4500 \text{ gld.}}{3+2} = 2700 \text{ gld.}$$

$$\text{en } K_C = \frac{2 \times 4500 \text{ gld.}}{3+2} = 1800 \text{ gld.}$$

Daar de winsten van A, B en C recht evenredig zijn met de kapitalen en de tijden, gedurende welke deze uitstaan, zullen de winsten zich verhouden als de getallen:

$$3000 \times 4,\ 2700 \times 6 \text{ en } 1800 \times 9,$$

of als $20,\ 27$ en 27.

En daar zij samen 925 gld. verdeelen, krijgt

$$\text{A } \frac{20 \times 925 \text{ gld.}}{20+27+27} = 12{,}5 \times 20 \text{ gld.} = 250 \text{ gld.}$$

$$\text{B } 12{,}5 \times 27 \text{ gld.} = 337\tfrac{1}{2} \text{ gld.}$$

$$\text{en C ook } 337\tfrac{1}{2} \text{ gld.}$$

176. Indien van twee getallen het verschil en de verhouding gegeven is, kan men ook onmiddellijk de getallen opschrijven.

Is b.v. gevraagd twee getallen te zoeken, die 26 verschillen, terwijl zij zich verhouden als 7 en 5, dan redeneert men als volgt:

Het eerste is 7 maal een ander, het tweede 5 maal hetzelfde getal. Hun verschil is dus 2 maal dat getal; en daar het verschil 26 is, zullen de getallen $7 \times \frac{26}{2}$ en $5 \times \frac{26}{2}$ of 91 en 65 zijn.

---

[1]) Hoewel het niet billijk is, dat de winsten recht evenredig zijn met de kapitalen en tijden, en dus bij gelijke winsten de kapitalen omgekeerd evenredig met de tijden (zie Hoofdstuk Winst en Verlies), volgt men in de Rekenkunde toch doorgaans bovenstaande oplossing.

Digitized by Google

In het algemeen:

Is het verschil der getallen V en de verhouding $a : b$ (waarin $a > b$ is), dan is het grootste getal $a \times \frac{V}{a-b}$ en het kleinste $b \times \frac{V}{a-b}$.

Opgave. Leid deze uitkomsten ook af met behulp van een eigenschap der evenredigheden.

Opgaven.

Verdeel 4365 *in drie deelen, die zich verhouden als:*

1. De getallen 4, 5 en 6.
2. De omgekeerden van 2, 3 en 6.
3. De getallen 0,4 ; 0,$\frac{4}{5}$ en $\frac{7}{15}$.

4. Drie personen A, B en C moeten 3300 gld. zoo verdeelen, dat A $1\frac{1}{6}$ maal zooveel krijgt als B en B $1\frac{1}{8}$ maal zooveel als C. Hoeveel krijgt elk?
5. A, B en C moeten 585 gld. zoodanig verdeelen, dat 3 maal het aandeel van A = 4 maal het aandeel van B = 6 maal het aandeel van C is. Hoeveel krijgt elk?
6. Drie boeren huren samen een weide voor 156 gld. A laat er 6 koeien gedurende 5 weken, B 4 koeien gedurende 7 weken en C 8 koeien gedurende 9 weken op weiden. Hoeveel huur moet ieder betalen?
7. Twee personen, A en B, nemen samen een werk aan voor 26,10 gld. A kan het werk alleen verrichten in 5 dagen, B in 4 dg. Als zij het samen doen, hoeveel krijgt dan ieder?
8. A en B bezitten samen 8500 gld. en zetten hun kapitalen tegen hetzelfde percent uit. A zet zijn kapitaal 9 maanden uit en krijgt evenveel rente als B, wiens kapitaal 8 maanden uitstaat. Hoe groot is elk kapitaal?
9. A, B en C hebben samen een werk aangenomen voor 392,5 gld. A laat er 4 man gedurende 10 dagen, B 5 man gedurende 9 dagen en C 6 man gedurende 12 dagen aan werken. Hoeveel krijgt elk?
10. A, B, C en D moeten 533 gld. zoodanig verdeelen, dat het aandeel van A staat tot dat van B als 2 : 3 ; de aandeelen van B en C verhouden zich als 3 : 4 ; die van C en D als 6 : 7. Hoeveel krijgt elk?
11. Iemand loopt den weg van A naar B met een snelheid van

Digitized by Google

6 KM in het uur, terug rijdt hij met een snelheid van 10 KM in het uur. Indien hij over heen- en terugreis 4 uren besteedt, hoe ver ligt A dan van B?

12. Verdeel 183 in vier deelen zoodanig, dat $\frac{2}{3}$ van het eerste deel gelijk is aan $\frac{1}{3}$ van het tweede deel en ook gelijk aan $\frac{5}{8}$ van het derde deel en ook gelijk aan $\frac{4}{7}$ van het vierde deel.
13. Iemand vertrekt 's morgens om 10 uur uit A en legt den weg naar B te voet af met een snelheid van 5 KM per uur. Te B rust hij $1\frac{1}{2}$ uur en rijdt terug met een snelheid van 9 KM per uur. Indien hij nu om 3 uur te A aankomt, hoe ver ligt A dan van B?
14. Twee kapitalen, die samen 8000 gld. groot zijn, brengen evenveel rente op. Het eerste kapitaal staat 8 maanden lang à 5 % per jaar uit; het tweede 6 maanden lang à 4% per jaar. Hoe groot is elk kapitaal?
15. Drie kapitalen, die samen 10000 gld. groot zijn, brengen evenveel rente op. Het eerste staat 8 maanden à $4\frac{1}{2}$ %, het tweede 6 maanden à 5%, het derde 5 maanden à 4 % per jaar uit. Hoe groot is elk kapitaal?
16. Twee kapitalen verschillen 2000 gld. Het eerste staat 6 maanden à $4\frac{1}{2}$ %, het tweede 8 maanden à 5 % per jaar uit. Indien de interesten zich verhouden als de getallen 9 en 20, vraagt men naar de grootte van elk der kapitalen.
17. A arbeidt aan zeker werk 5 dagen en B 6 dagen, terwijl zij daarna de rest of $\frac{1}{3}$ van het werk samen afmaken in $2\frac{8}{11}$ dag. In hoeveel dagen kan ieder het werk alleen doen?
18. Werkt A aan een werk 4 dagen, dan kunnen B en C samen de rest afmaken in $8\frac{2}{11}$ dag. Werken A en B er samen 4 dagen aan, dan kan C de rest of $\frac{11}{20}$ van het werk in $13\frac{1}{3}$ dag verrichten. In hoeveel tijd kan elk hunner het werk alleen doen?
19. De som van teller en noemer eener niet vereenvoudigde breuk bedraagt 4875, terwijl de som van teller en noemer, wanneer de breuk zooveel mogelijk vereenvoudigd is, 65 bedraagt. Zoo nu de som der beide noemers 3192 is, vraagt men naar de niet vereenvoudigde breuk.
20. Het verschil van teller en noemer eener niet vereenvoudigde breuk bedraagt 288, terwijl het verschil van teller en noemer, als de breuk zooveel mogelijk vereenvoudigd is, 18 bedraagt. Zoo nu de som der beide tellers 119 bedraagt, vraagt men naar de vereenvoudigde breuk.

Digitized by Google

21. Drie werklieden, A, B en C, nemen een werk aan voor 180 gld. A en B kunnen het samen in $6\frac{2}{5}$ week, B en C samen in $8\frac{4}{7}$ week afmaken. Als het weekloon van B 12 gld. is, wordt er gevraagd:
a. het weekloon van elken werkman;
b. in hoeveel weken maakt elke man het werk?
c. in hoeveel weken doen zij het samen?

22. A, B en C hebben aan een werk 74,80 gld. verdiend. Het dagloon van A staat tot dat van B als 9 : 10. Het dagloon van B staat tot dat van C als 12 : 17. Hoe groot is ieders aandeel in het verdiende bedrag, als A 25, B 20 en C 14 dagen gewerkt heeft?

Digitized by Google

INTERESTREKENING.

177. Wanneer A aan B een som geld leent, b.v. 3000 gld., dan wordt daarbij doorgaans bedongen, dat B voor elk jaar, dat hij die som geld te leen heeft, aan A een zekere vergoeding betaalt, welke **interest** of **rente** genoemd wordt.

Indien B voor elke honderd gulden, die hij geleend heeft, jaarlijks 4 gld. rente betaalt, dan zegt men, dat de rente 4 **percent** bedraagt.

Voor de som van 300 gld. betaalt hij dus elk jaar $\frac{3000}{100} \times 4$ of 120 gld. rente.

A heet de **geldschieter (schuldeischer** of **crediteur)**; B heet de **geldnemer (schuldenaar** of **debiteur).**

B geeft aan A een schriftelijke **schuldbekentenis.** Daarin staat vermeld, dat hij de som ontvangen heeft, hoe groot het percent rentevergoeding is, wanneer de rente betaald moet worden, en hoe en wanneer de geleende som moet terugbetaald worden.

Niet altijd wordt de interest per jaar berekend. Een koopman b.v., die eenig geld heeft, dat hij in de eerste weken niet behoeft uit te geven, zal verkeerd doen, als hij dat geld renteloos laat liggen. Hij **plaatst** het daarom **à depôsito** bij een bank, onder voorwaarde, dat hij het geld geheel of gedeeltelijk kan terugkrijgen, zoodra hij het wenscht.

Een koopman, die b.v. op 5 Augustus 9000 gld. à deposito plaatst bij een bank à 2 % 's jaars en op 15 September de som geheel terugvraagt, zal op dat oogenblik behalve de 9000 gld. nog rente krijgen van 5 Augustus tot 15 September.

Men is gewoon bij renteberekening elke maand op 30 dagen en dus het jaar op 360 dagen te stellen, terwijl men verder het aantal rentedagen tusschen twee datums van dezelfde maand door aftrekking vindt. Zoo heeft men b.v.:

Digitized by Google

Van 1 Januari tot 1 Maart = 60 dagen.

Van 3 Januari tot 20 Januari = 20 — 3 of 17 dagen.

Van 5 Mei tot 14 Augustus = 99 dagen; want van 5 Mei tot 5 Augustus is 3 maanden of 90 dagen, en van 5 Augustus tot 14 Augustus is 14 — 5 of 9 dagen; samen 99 dagen.

Van 14 September tot 3 November = 49 dagen; want van 3 September tot 3 November is 2 maanden of 60 dagen, dus van 14 September tot 3 November is 14 — 3 of 11 dagen minder; in het geheel dus 60 — 11 of 49 dagen.

De koopman uit ons voorbeeld ontvangt dus op 15 September behalve de 9000 gld. nog 40 dagen rente.

Nu is de jaarlijksche rente $\frac{9000}{100} \times 2$ gld. = 180 gld.; de rente per dag $\frac{180}{360}$ gld. = $\frac{1}{2}$ gld.; de rente in 40 dg. dus $40 \times \frac{1}{2}$ gld. = = 20 gld. De koopman ontvangt dus 9000 gld. + 20 gld. = 9020 gld. van de bank terug.

Bij de berekening van rente is men gewoon alles wat minder is dan $\frac{1}{2}$ cent te verwaarloozen; $\frac{1}{2}$ cent en wat meer is dan $\frac{1}{2}$ cent en minder dan 1 cent wordt voor 1 cent gerekend.

Indien b.v. de koopman uit ons voorbeeld 4000 gld. à deposito had geplaatst, zou hij aan rente in die 40 dagen genoten hebben:

$$\frac{40}{360} \times 80 \text{ gld.} = 8{,}888 \text{ gld.}$$

hetwelk men rekent voor 8,89 gld.

178. Indien men een som gelds b.v. 100 gld. op een spaarbank plaatst, welke 3 % rente geeft, dan ontvangt men na verloop van een jaar de 3 gld. rente niet terug. Deze wordt bij het kapitaal gevoegd, zoodat men bij het begin van het tweede jaar 103 gld. op interest heeft staan. Deze brengen in het tweede jaar 3% of 3,09 gld. rente op, zoodat men op het einde van het tweede jaar 103 gld. + 3,09 gld. = 106,09 gld. bezit, enz.

Men zegt nu, dat het kapitaal op samengestelden interest is uitgezet.

Wanneer na elken termijn van rentebetaling de verschenen rente niet betaald wordt, maar bij het kapitaal gevoegd wordt, dan zegt men, dat het kapitaal op **samengestelden interest** is uitgezet. Wordt de rente na elken termijn betaald, dan spreekt men van **enkelvoudigen interest.**

Digitized by Google

Bij de samengestelde interestrekening komen ingewikkelde berekeningen voor. Deze wordt behandeld in ons Leerboek der Algebra, Derde Deel.

Overal waar in het vervolg sprake is van interest, bedoelen wij enkelvoudigen interest.

Voorbeelden.

1. *Hoeveel interest brengt een kapitaal van* 1035 *gld. op, dat van* 4 *Juli tot* 11 *September à* 3 % *('s jaars) op interest uitstaat?*

Oplossing.

Van 4 Juli tot 11 September is 2 maanden $+ (11 - 4)$ of 7 dagen $= 2 \times 30 + 7$ of 67 dagen.

1035 gld. brengt in 1 jaar op $\frac{1035}{100} \times 3$ gld.;

dus in 1 dag $\frac{1035 \times 3}{100 \times 360}$ gld.;

dus in 67 dagen $\frac{67 \times 1035 \times 3}{100 \times 360}$ gld.

Deelt men teller en noemer door 9×5, dan krijgt men $\frac{67 \times 23 \times 3}{800}$ gld. $= 5{,}77875$ gld., hetgeen men voor 5,78 gld. rekent.

Opmerking. Indien men als volgt gerekend had:

1035 gld. à 3 % geeft in een jaar $10{,}35 \times 3 = 31{,}05$ gld., dus in 1 dag $\frac{31{,}05}{360}$ gld. $= 0{,}08625$ gld. of 0,09 gld., dus in 67 dagen $67 \times 0{,}09$ gld. $= 6{,}03$ gld., dan is de uitkomst verkeerd.

De reden daarvan is de volgende:

Indien men 0,09 gld. in plaats van 0,08625 gld. rekent, neemt men 0,00375 gld. te veel. Door de vermenigvuldiging met 67 neemt men dus $67 \times 0{,}0375$ gld. $= 0{,}25125$ gld. te veel. De uitkomst is daardoor 0,25125 gld. te groot en moet dus zijn 6,03 gld. $-$ 0,25125 gld. $=$ $= 5{,}77875$ gld., waarvoor men 5,78 gld. rekent.

Men onthoude dus:

De verwaarloozing, bedoeld in deze paragraaf, mag alleen plaats hebben bij de einduitkomst, niet gedurende de bewerking.

2. *Een kapitaal, dat tegen* $3\frac{1}{2}$ % *'s jaars uitstaat, brengt in* 6 *maanden evenveel interest op, als een ander kapitaal, dat* 2000 *gld. kleiner is, in* 7 *maanden tegen* $4\frac{1}{2}$ % *'s jaars. Hoe groot zijn de beide kapitalen?*

Digitized by Google

Oplossing.

Daar twee kapitalen, die denzelfden interest opbrengen, omgekeerd evenredig zijn met de percenten en de tijden, heeft men:

$$K_1 : K_2 = \frac{1}{T_1 \times P_1} : \frac{1}{T_2 \times P_2},$$

dus $$K_1 : K_2 = \frac{1}{6 \times 3\frac{1}{2}} : \frac{1}{7 \times 4\frac{1}{2}},$$

of na herleiding $K_1 : K_2 = 3 : 2$.

Het eerste kapitaal is dus $1\frac{1}{2} \times$ het tweede.

De helft van het tweede kapitaal is dus 2000 gld.

Het tweede kapitaal is dus 4000 gld. en het eerste 6000 gld.

3. *Twee kapitalen, samen* 11000 *gld. groot, staan respectievelijk à* 5 *en* 4% *'s jaars uit. Indien het tweede kapitaal in* 9 *maanden* 55 *gld. meer rente opbrengt dan het eerste in* 6 *maanden, vraagt men, hoe groot elk kapitaal is.*

Oplossing.

Het eerste kapitaal staat 6 maanden lang à 5 % 's jaars uit en brengt dus $2\frac{1}{2}$% op. Het tweede kapitaal staat 9 maanden lang à 4 % 's jaars uit en brengt dus 3 % op.

Was het tweede kapitaal 11000 gld. en het eerste 0 gld., dan zou het tweede kapitaal $\frac{3}{100} \times 11000$ gld. $= 330$ gld. rente opbrengen en het eerste 0 gld. Het verschil in rente is dan 330 gld.

Neemt men 100 gld. van het tweede kapitaal af, en voegt men dit bij het eerste, dan vermindert de rente van het tweede kapitaal met 3 gld. en vermeerdert die van het eerste kapitaal met $2\frac{1}{2}$ gld. Het verschil in rente wordt dus $3 + 2\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$ gld. kleiner.

Het verschil moet $330 - 55$ of 275 gld. kleiner worden. Zoo dikwijls dus $5\frac{1}{2}$ gld. op 275 gld. begrepen is, zoo vaak moet men 100 gld. van het tweede kapitaal afnemen en bij het eerste voegen.

Nu is $5\frac{1}{2}$ gld. 50 malen op 275 gld. begrepen. Men moet dus 50×100 of 5000 gld. van het tweede kapitaal afnemen en bij het eerste voegen.

Digitized by Google

Het tweede kapitaal is dus 11000 gld. — 5000 gld. of 6000 gld. groot en het eerste 5000 gld.

Opmerking. Wij zijn begonnen het tweede kapitaal op 11000 gld. te stellen en het eerste op 0 gld. Men had even goed twee andere kapitalen kunnen nemen, die samen 11000 gld. groot zijn. De leerling neme b.v. voor het eerste kapitaal 11000 gld. en voor het tweede 0 gld., of voor elk der kapitalen 5500 gld.

Andere oplossing.

Het eerste kapitaal staat 6 maanden à 5 % uit en brengt dus $2\frac{1}{2}$ % op; het tweede kapitaal staat 9 maanden à 4 % uit en brengt dus 3 % op.

Het tweede kapitaal brengt, behalve de rente van het eerste kapitaal, nog 55 gld. op. Om evenveel rente als het eerste kapitaal op te brengen, moet van het tweede kapitaal dus $\frac{55}{3} \times 100$ gld. of $1833\frac{1}{3}$ gld. genomen worden.

De som der kapitalen wordt daardoor 11000 gld. — $1833\frac{1}{3}$ gld. = $= 9166\frac{2}{3}$ gld. Daar nu de kapitalen evenveel rente opbrengen, zijn zij omgekeerd evenredig met de percenten, dus:

$$K_1 : K_2 = \frac{1}{2\frac{1}{2}} : \frac{1}{3}$$

of

$$K_1 : K_2 = 6 : 5.$$

Het eerste kapitaal is dus $\frac{6 \times 9166\frac{2}{3} \text{ gld.}}{6+5} = 5000$ gld. en het tweede dus 11000 — 5000 of 6000 gld.

4. *Van twee kapitalen, die samen* 12000 *gld. groot zijn, staat het grootste tegen* 1 % *meer uit dan het kleinste. Verwisselt men de percenten, dan brengen ze samen* 20 *gld. minder rente op. Hoe groot is elk kapitaal?*

Oplossing.

In het eerste geval brengt het grootste kapitaal 1 % rente meer op dan in het tweede geval, het kleinste kapitaal daarentegen 1 % rente minder.

De rente in het eerste geval bedraagt dus 1% van het grootste kapitaal — 1% van het kleinste of 1 % van het verschil der kapitalen meer dan in het tweede geval. Hieruit volgt:

Digitized by Google

1 % van het verschil der kapitalen	= 20	gld.
of het verschil der kapitalen	= 2000	gld.
bovendien is de som der kapitalen	= 12000	gld.
		op
2 × het grootste kapitaal	= 14000	gld.
Het grootste kapitaal is dus	= 7000	gld.
en het kleinste	= 5000	gld.

Opgaven.

Bereken den interest van:

1. 4600 gld. à $4\frac{1}{2}$ % in 15 maanden.
2. 2315 gld. à 4 % in 10 maanden.
3. 6400 gld. à 3 % in 135 dagen.
4. 7200 gld. à $2\frac{1}{2}$ % van 15 Maart tot 6 Augustus.

5. Welk kapitaal brengt à 5 % in $1\frac{1}{2}$ jaar 375 gld. rente op?
6. Tegen hoeveel percent staat een kapitaal van 6000 gld. uit, als het in 11 maanden 220 gld. rente opbrengt?
7. Gedurende hoeveel dagen staat een kapitaal van 5320 gld. uit, als het à $4\frac{1}{2}$ % 133 gld. rente opbrengt?
8. Iemand leent een kapitaal uit à 5 % en ontvangt na een jaar aan kapitaal en interest 5103 gld. terug. Hoe groot is dat kapitaal?
9. Een ander leent een kapitaal uit à 4 % 's jaars en ontvangt na 75 dagen 4840 gld. terug. Hoe groot is dat kapitaal?
10. Welk kapitaal moet men 9 maanden lang à $3\frac{1}{2}$ % per jaar uitzetten, om $1\frac{1}{5}$ maal zooveel rente op te leveren als 2800 gld. à 5 % in 6 maanden?
11. Een huis brengt jaarlijks 650 gld. huur op, doch gemiddeld moet jaarlijks 74 gld. aan belasting en herstellingen betaald worden. Hoeveel zal iemand, die $4\frac{1}{2}$ % van zijn geld wenscht te maken, voor dat huis willen geven?
12. Tegen welk percent moet een kapitaal uitgezet worden, om in 1 jaar en 8 maanden $1\frac{1}{5}$ maal zooveel interest op te leveren als een even groot kapitaal in 1 jaar en 3 maanden à 5 %?
13. Twee kapitalen zijn samen 13000 gld. groot. Het eerste staat 14 maanden à $4\frac{1}{2}$ % per jaar uit, het tweede 10 maanden en 24 dagen à 5 %. Hoe groot zijn beide kapitalen, als ze evenveel interest opleveren?
14. Als een kapitaal à 5 % uitgezet in $1\frac{1}{2}$ jaar 180 gld. interest

Digitized by Google

geeft, tegen hoeveel percent zal men het dan moeten uitzetten, om in 1 jaar en 10 maanden 198 gld. op te brengen?

15. Twee kapitalen verschillen 2000 gld. Het grootste staat uit à 5 %, het kleinste à 4 %. Als het kleinste per jaar zooveel guldens opbrengt, als ze samen rijksdaalders geven, vraagt men de grootte der kapitalen.
16. Een kapitaal staat 6 maanden lang à 5 % per jaar uit, een ander kapitaal 9 maanden à $3\frac{1}{2}$ % per jaar. Hunne interesten verhouden zich als 25 en 36. Hoe verhouden zich de kapitalen? Als het tweede kapitaal 2600 grooter is dan het eerste, hoe groot zijn dan de kapitalen?
17. A en B handelen samen met 4500 gld. A geeft zijn geld 8 maanden en B $7\frac{1}{2}$ maand in den handel. A ontvangt bij het einde van den handel $\frac{4}{7}$ van de winst. Hoeveel heeft ieder ingelegd?
18. De kapitalen van drie personen verhouden zich als de getallen 2, 3 en 5. Ze zetten alle drie hun kapitalen uit à 5% per jaar en ontvangen na 9 maanden samen 675 gld. aan rente. Hoeveel bezit ieder?
19. De kapitalen van A, B en C verhouden zich als de getallen 2, 3 en 4. Ze zetten hun geld respectievelijk à $4\frac{1}{2}$, 4 en $3\frac{1}{2}$ % uit. Indien C na een jaar 100 gld. meer interest ontvangt dan A, hoeveel heeft elk dan ingelegd?
20. Een kapitaal, dat à 5 % per jaar uitstaat, brengt in 8 maanden evenveel interest op, als een ander kapitaal, dat 1000 gld. grooter is, in $6\frac{2}{3}$ maand à $4\frac{1}{2}$ % per jaar. Hoe groot zijn de beide kapitalen?
21. Twee kapitalen zijn samen 10200 gld. groot. Het eerste staat 9 maanden lang op interest uit à $3\frac{1}{2}$ % en brengt $\frac{4}{5}$ van de rente op, die het tweede kapitaal in 7 maanden à 5 % per jaar opbrengt. Hoe groot zijn beide kapitalen?
22. Twee kapitalen, samen 9400 gld. groot, staan respectievelijk à 4 % en 5 % per jaar uit. Indien zij in een jaar samen 430 gld. aan rente opbrengen, hoe groot is dan elk kapitaal?
23. Twee kapitalen, samen 8000 gld. groot, staan respectievelijk à 5 en 4 % 's jaars uit. Indien het tweede kapitaal in 9 maanden 50 gld. meer rente opbrengt, dan het eerste in 8 maanden, hoe groot is dan elk kapitaal?
24. A zet een kapitaal uit à 5 % en nog een, dat 4000 gld. grooter is à 4 %. Als hij van het laatste jaarlijks 100 gld. interest meer trekt dan van het eerste, vraagt men hoe groot het eerste kapitaal is.

Digitized by Google

25. Twee kapitalen zijn samen 10000 gld. groot. Het aantal rijksdaalders, dat het eene à $4\frac{3}{4}$ % 's jaars opbrengt, is 194 minder, dan het aantal gld. dat het andere opbrengt à $4\frac{1}{2}$ %. Hoe groot is ieder kapitaal?
26. Twee kapitalen, samen 13200 gld. groot, staan respectievelijk à $4\frac{1}{2}$ en 5 % per jaar uit. Indien de rente van het eerste kapitaal in 8 maanden vermeerderd met die van het tweede kapitaal in 9 maanden 450 gld. bedraagt, hoe groot is dan elk kapitaal?
27. Drie kapitalen verhouden zich als de getallen 4, 5 en 6. Ze staan respectievelijk à $4\frac{1}{2}$, 4 en 5 % per jaar uit. Indien na 8 maanden de rente van het derde kapitaal 120 gld. meer is dan de rente van het eerste kapitaal, hoe groot is dan elk der kapitalen?
28. Drie kapitalen zijn samen 14000 gld. groot en staan respectievelijk 9, 8 en 6 maanden uit tegen 4, 5 en $4\frac{1}{2}$ % per jaar. Indien de interesten zich verhouden als de getallen 9, 20 en 27, vraagt men, hoe groot elk kapitaal is.
29. Iemand leent van een ander geld, waarvoor hij een zeker percent interest per jaar zal betalen. Na 3 maanden betaalt hij terug $\frac{2}{5}$ van de geleende som met den daarvan verschuldigden interest en na 9 maanden de rest. Als hij de eerste maal 1456,20 gld. en de tweede maal 2232,90 gld. betaalt, vraagt men hoeveel en tegen welk percent hij geleend heeft?
30. Een kapitaal staat tegen 5 % op interest uit. Een ander kapitaal, dat 1300 gld. grooter is, geeft in 9 maanden à 4 % 's jaars 53 gld. meer aan interest, dan het eerste in 6 maanden. Hoe groot is elk kapitaal?
31. Van een kapitaal wordt 5000 gld. uitgezet à 4 %, de rest à $5\frac{1}{3}$ % per jaar. Was het geheele kapitaal à 5 % uitgezet, dan zou men per jaar 30 gld. meer aan interest ontvangen. Hoe groot is het geheele kapitaal?
32. Iemand heeft een kapitaal, dat hem jaarlijks 750 gld. rente opbrengt. Wanneer hij $\frac{1}{3}$ van dit kapitaal tegen $\frac{1}{2}$ % minder en de rest tegen $\frac{1}{2}$ % meer uitzette, zou hij jaarlijks 45 gld. meer aan interest ontvangen. Hoe groot is het kapitaal, en tegen hoeveel percent staat het uit?
33. De kapitalen van drie personen A, B en C verhouden zich als de getallen 3, 4 en 5. A zet zijn kapitaal uit tegen $5\frac{1}{2}$, B tegen 4 en C tegen $4\frac{1}{2}$ %. Na 18 maanden ontvangt C 270 gld. meer aan interest dan A. Hoe groot zijn de kapitalen?

Digitized by Google

34. Twee kapitalen verschillen 2000 gld.; het grootste, dat tegen 1 % meer uitstaat dan het kleinste, brengt per jaar 150 gld. meer rente op dan het kleinste. Verwisselt men de percenten, dan brengt het grootste 30 gld. meer op dan het kleinste. Hoe groot is elk kapitaal? En hoe groot zijn de percenten?
35. Twee kapitalen, die 2000 gld. verschillen, staan uit, het eene tegen 1 % meer dan het andere. Kon men de percenten verwisselen, dan zouden zij per jaar evenveel rente opbrengen. Nu echter brengt het eene 120 gld. meer op dan het andere. Hoe groot zijn de kapitalen, en tegen hoeveel % staan zij uit?

Digitized by Google

KORTINGEN IN DEN HANDEL.

A. Kortingen op het gewicht.

179. Koopwaren, die verzonden worden, zijn verpakt in kisten, papier, balen, zakken enz. Deze verpakking heet **emballage**. Het gewicht van de koopwaren met de emballage heet het **brutogewicht**; en naar dit gewicht wordt de vracht berekend, die voor de verzending der goederen betaald moet worden.

Doorgaans is de prijs der verpakking gering in vergelijking met den prijs der goederen.

Daarom betaalt de kooper in den regel niet het gewicht der emballage of de **tarra**, maar alleen het werkelijke gewicht der goederen of het **nettogewicht**. Het nettogewicht wordt dus verkregen door de tarra van het brutogewicht af te trekken. Wij hebben dus:

Brutogewicht — tarra = nettogewicht.

Slechts wanneer de verpakking duur is in vergelijking met de waarde der goederen, laat men den kooper de tarra betalen, b.v. vaten, waarin petroleum verzonden wordt. Bij de bestelling van wijn worden de flesschen in rekening gebracht.

Sommige artikelen worden altijd op dezelfde wijze ingepakt en verzonden. Zoo verzendt men b.v. uit Indië steeds de koffie in balen, de suiker in kranjangs, de thee in kisten, zooveel mogelijk van dezelfde afmeting.

Men kan daarom vrij zeker reeds vooraf bepalen, hoe groot de tarra is, en drukt haar daarom uit in percenten van het brutogewicht. Deze soort van tarra heet **uso-tarra**.

Van andere artikelen moet echter de verpakking gewogen worden. De reden daarvan is, dat men een bijzondere verpakking heeft, of dat de waren zoo duur zijn, dat het voor den kooper niet onver-

Digitized by Google

schillig is, of hij eenige KG meer of minder betaalt. Deze soort van tarra, die dus in KG wordt uitgedrukt, heet **netto-tarra.**

Bij middelsoortwaren gaat men ook wel eens als volgt te werk. Van eenige pakken (colli) bepaalt men de tarra nauwkeurig; en rekent, dat de andere colli gemiddeld even zwaar wegen. Zoo bepaalt men b.v. de tarra van Cadix-vijgen, die in even groote kistjes verpakt zijn, door het gewicht van 6 kistjes (een wik) nauwkeurig te bepalen; zij deze $1\frac{1}{2}$ KG. Op een hoeveelheid van 240 of 40×6 kistjes berekent men dan $40 \times 1\frac{1}{2}$ KG of 60 KG tarra. Deze soort van tarra heet **gemiddelde** of **gereguleerde tarra.**

180. De tarra is niet de eenige korting op het gewicht, die de verkooper aan den kooper toestaat.

Dikwijls ontmoet men op **facturen** (rekeningen) de volgende kortingen: goedgewicht, stille uitslag, raffactie.

Onder **goedgewicht** verstaat men de korting, die de grossier aan den kleinhandelaar toestaat, omdat deze laatste bij het wegen van kleine hoeveelheden te veel geeft.

De **stille uitslag** is eigenlijk hetzelfde als goedgewicht. In vroegeren tijd was het gewoonte, dat de kleinhandelaar aan den arm van de balans, waaraan de gewichten hingen, een klein gewichtje bevestigde, waardoor de klanten dus meer ontvingen dan ze bestelden. De groothandelaar gaf hem daarom korting, die men stille uitslag noemde.

Raffactie wordt toegestaan, wanneer de waren òf door het vervoer òf door de minder goede verpakking beschadigd kunnen worden; ze wordt b.v. toegestaan bij tabak.

Verder hebben nog vele artikelen hun eigen kortingen op het gewicht. Zoo wordt b.v. bij rozijnen een korting op de stelen toegestaan; bij stroop, omdat er altijd iets in het vat blijft hangen.

Al deze kortingen worden uitgedrukt òf in percenten, òf in KG; ze worden successievelijk berekend in de volgorde, waarin ze opgegeven staan. Is een korting uitgedrukt in percenten, dan neemt men haar van het bedrag, dat men verkrijgt, als men van het brutogewicht de te voren genoemde kortingen aftrekt. Onder het nettogewicht verstaan wij in het vervolg hetgeen er overblijft, als men van het brutogewicht alle kortingen heeft afgetrokken.

Digitized by Google

voor, kleiner dan $\frac{1}{2}$ KG,

en wat meer is dan $\frac{1}{2}$ KG

de prijs per $\frac{1}{2}$ KG opgegeven, dan

te werk: wat minder is dan $\frac{1}{4}$ KG

van $\frac{1}{4}$ KG tot $\frac{3}{4}$ KG rekent voor $\frac{1}{2}$ KG;

KG en meer wordt voor 1 KG gerekend.

In onze opgaven wordt steeds de eerste wijze van berekening gevolgd.

Voorbeelden.

1. *Wat is het nettogewicht eener partij tabak, wegende bruto 3512 KG, tarra 4 %, goedgewicht 3 %, raffactie 5 %?*

Oplossing.

De tarra is 4 % van het brutogewicht, dus 4 % van 3512 KG = = *140,48* KG, hetgeen gerekend wordt voor 140 KG.

Het goedgewicht is 3 % van 3512 — 140 of 3372 KG, dus *101,16* KG, hetgeen gerekend wordt voor 101 KG.

De raffactie is 5 % van 3372 — 101 of 3271 KG = 163,55 KG, *hetgeen* gerekend wordt voor 164 KG.

Het nettogewicht is dus 3271 — 164 of 3107 KG.

Gewoonlijk schrijft men de berekening als volgt:

Brutogewicht		3512 KG.
Tarra 4 %	=	140 „
		3372 KG.
Goedgewicht 3 %	=	101 „
		3271 KG.
Raffactie 5 %	=	164 „
Nettogewicht		3107 KG.

Opmerking. Zijn alle kortingen in percenten uitgedrukt, dan is het theoretisch onverschillig, in welke volgorde de percenten genomen worden.

In ons voorbeeld bleef er, nadat 4 % tarra van het brutogewicht afgenomen was, $\frac{96}{100} \times 3512$ KG.

Digitized by Google

lgewicht bedroeg 3% van deze rest, en er bleef dus over

rest of $\frac{97}{100} \times \frac{96}{100} \times 3512$ KG.

bedroeg 5 % van de laatste rest, en er bleef dus

.e laatste rest of $\frac{95}{100} \times \frac{97}{100} \times \frac{96}{100} \times 3512$ KG.

.en de kortingen genomen in de volgorde 5, 4 en 3 percent,

.an zou het nettogewicht geworden zijn $\frac{97}{100} \times \frac{96}{100} \times \frac{95}{100} \times 3512$ KG,

welke uitkomst dezelfde is, omdat een produkt niet verandert, als men de volgorde der factoren wijzigt.

Het is echter mogelijk, dat tengevolge van het verwaarloozen de eene uitkomst een weinig van de andere verschilt.

Het is duidelijk, dat de volgorde ook onverschillig is, als alle kortingen in KG zijn uitgedrukt.

Zijn echter eenige kortingen uitgedrukt in KG, andere in percenten, dan is het niet onverschillig, in welke volgorde men de kortingen neemt. Men moet zich dan houden aan den regel: neem de kortingen in de volgorde, waarin ze gegeven zijn.

2. *Hoe groot is het nettogewicht van* 40 *vaten rozijnen, wegende bruto* 9164 *KG, tarra* 18 *KG per vat, goedgewicht* 3 %, *stille uitslag* 263 *KG, korting voor de stelen* $2\frac{1}{2}$ %?

Oplossing.

Brutogewicht		9164 KG
Tarra 40 × 18 KG =		720 „
		8444 KG
Goedgewicht 3 % = 253,32 KG of		253 „
		8191 KG
Stille Uitslag		263 „
		7928 KG
Korting voor de stelen $2\frac{1}{2}$ % = 198,2 KG of		198 „
Nettogewicht		7730 KG

3. *Bereken het brutogewicht van een partij peper, als de tarra* 184 *KG, het goedgewicht* 3% *en de stille uitslag* 5% *bedraagt, terwijl het nettogewicht* 5702 *KG is.*

Digitized by Google

Oplossing.

We schrijven de berekening als gewoonlijk op, en vullen de onbekende getallen niet in:

Brutogewicht	. . . KG.
Tarra	184 „
Eerste Rest	. . . KG.
Goedgewicht 3 %	. . . „
Tweede rest	. . . KG.
Stille uitslag 5 %	. . . „
Nettogewicht	5702 KG.

De stille uitslag is 5 % of $\frac{1}{20}$ van de tweede rest; dus het nettogewicht is $\frac{19}{20}$ van de tweede rest. De tweede rest is dus $\frac{20}{19} \times$ $\times$ 5702 KG = 6002,1.....KG, hetwelk men rekent voor 6002 KG.

Het goedgewicht is 3 % of $\frac{3}{100}$ van de eerste rest; dus 6002 KG is $\frac{97}{100}$ van de eerste rest. De eerste rest is dus $\frac{100}{97} \times$ $\times$ 6002 KG = 6187,6.....KG, hetwelk men rekent voor 6188 KG.

Het brutogewicht is dus 6188 KG + 184 KG = 6372 KG.

Opgaven.

Bereken het nettogewicht van:

1. 300 balen peper, bruto 12830 KG, tarra 1½ KG per baal, goedgewicht 4 %.
2. 30 pakken Deli-tabak, bruto 5712 KG, tarra 9 KG per pak, raffactie 5 %.
3. 20 kranjangs Javasuiker, bruto 3512 KG, tarra 3 %, goedgewicht 4 %, stille uitslag 72 KG.
4. 20 pakken Noord-Amerikaansch katoen, bruto 7512 KG, tarra 3½ KG per pak, goedgewicht 2 %, raffactie 3 %, korting voor onreinheden 2½ KG per pak.

Bereken het brutogewicht van:

5. 8 ceroenen amandelen, als het nettogewicht 1748 KG is en de tarra 5 %.
6. 20 pakken tabak, als de tarra 382 KG bedraagt, de raffactie 5 % en het nettogewicht 6688 KG (Denk aan de volgorde).

Digitized by Google

7. Een partij Javasuiker, als de tarra 242 KG bedraagt, het goedgewicht 5 %, de stille uitslag 4 %, terwijl het nettogewicht 2991 KG is.

B. Kortingen op de waarde.

181. In vele winkels is het gewoonte, om de klanten voor elke som, die zij betalen moeten, een zeker percent korting te geven. Deze korting noemt men **rabat**. Geeft een winkelier 5 % rabat, dan behoeft men in plaats van b.v. 12 gld. slechts 12 gld. — 5 % van 12 gld. of 11,40 gld. te betalen. De bedoeling daarvan is, om op die wijze meer klanten te krijgen.

Ook in den groothandel geschiedt dit, ofschoon minder dan vroeger. Op facturen van vroegeren tijd leest men dikwijls, dat op een bedrag 2, soms meer, kortingen worden toegestaan.

Zulk een korting, die aan iederen kooper wordt toegestaan, heet **rabat**.

In den groothandel is het gewoonte geworden, dat een koopsom niet **contant** (dadelijk bij den koop) maar over eenigen tijd betaald moet worden. Zoo koopt men het eene artikel per 2 maanden, het andere per 3 maanden. Wenscht de kooper echter contant te voldoen, dan krijgt hij **korting voor contante betaling**.

De laatste is een **toevallige korting,** rabat daarentegen een **usantiëele korting**.

Geeft de verkooper op een som rabat en korting voor contante betaling, dan wordt van de koopsom eerst het rabat en van de rest de korting voor contante betaling afgenomen.

Ook hierbij is men gewoon, zooals reeds bij de interestrekening is opgemerkt, wat minder is dan $^1/_2$ ct. te verwaarloozen, $^1/_2$ ct. en meer voor 1 cent te rekenen.

Voorbeeld.

Op een rekening van 1348,20 *gld. wordt* 3 % *rabat en* $1\frac{1}{2}$ % *korting voor contante betaling toegestaan. Hoeveel moet de kooper betalen?*

Oplossing.

Koopsom	1348,20	gld.
Rabat 3 % = 40,446 of	40,45	„
	1307,75	gld.
Korting voor contant $1\frac{1}{2}$ % = 19,61625 of	19,62	„
Netto bedrag	1288,13	gld.

Digitized by Google

Opgaven.

1. Op een rekening van 3514,20 gld. wordt 4 % rabat en 2 % korting voor contante betaling toegestaan. Hoeveel moet de kooper betalen?
2. Een rekening, waarop 4 % rabat werd toegestaan, werd voldaan met 867,84 gld. Hoe hoog was die rekening?
3. Een andere rekening, waarop 3 % rabat en daarna nog 2 % korting voor contante betaling werd toegestaan, werd voldaan met 336,51 gld. Hoe hoog was die rekening?
4. Bereken den prijs van 20 kisten Marylandtabak, bruto 5648 KG, tarra 6 KG per kist, goedgewicht 3 %, raffactie 4 % à 0,64 gld. per KG netto, korting voor contante betaling $1\frac{1}{2}$ %.
5. Eveneens den prijs van 30 balen Javakoffie, bruto 5413 KG, tarra 4 %, goedgewicht $5\frac{1}{2}$ KG per baal à 82 ct. per KG netto, met 3 % rabat en 2 % korting voor contante betaling.
6. Hoe groot is het brutogewicht eener partij suiker, als de tarra 4 % bedraagt, de prijs per KG netto 35 ct. is en voor contante betaling $1\frac{1}{2}$ % wordt gekort, indien voor de partij 2482,20 gld. betaald wordt.
7. Iemand heeft een schuld van 10000 gld., die hij gedeeltelijk over 4, gedeeltelijk over 6 maanden moet betalen. Voor contante betaling wordt hem 6 % korting per jaar toegestaan. Indien hij nu contant 9740 gld. betaalt, vraagt men, welke som hij over 4 en welke over 6 maanden moet betalen.
8. A is aan B 11240 gld. schuldig, te betalen deels over 4 deels over 8 maanden. Met $4\frac{1}{2}$ % 's jaars korting boven het honderd*) betaalt hij de geheele schuld af met 11000 gld. Hoeveel moet hij over 4 maanden betalen?

---

*) „Een korting van $4\frac{1}{2}$ % 's jaars boven het honderd" beteekent, dat hij in plaats van $104\frac{1}{2}$ gld. over een jaar, contant 100 gld. moet betalen.

Digitized by Google

MENGINGREKENING.

182. Dikwijls worden in het dagelijksch leven artikelen van dezelfde soort, maar van verschillende kwaliteit, bij elkaar gemengd, ten einde daaruit een mengsel te verkrijgen, dat om de een of andere reden beter verkocht kan worden.

Zoo mengt men dikwijls hoeveelheden tabak van verschillende waarde bij elkaar, om een mengsel te verkrijgen, dat zich onderscheidt door bijzonderen geur of smaak. Ook met thee geschiedt dit dikwijls.

Ook hoeveelheden goud van verschillende kwaliteit smelt men samen, ten einde een mengsel te verkrijgen van bepaalde hoedanigheid. Het goud wordt in zuiveren toestand zelden aangetroffen, het is dan bros en dus niet geschikt voor bewerking. Meestal is het vermengd met andere metalen, **alliage** genaamd. Het mengsel heet dan een **legeering**. Bevat een legeering goud van 4 KG slechts 3 KG zuiver goud en 1 KG ander metaal, dan zegt men, dat het **gehalte** van het goud $\frac{3}{4}$ is. Ook noemt men 4 KG wel het **brutogewicht** en 3 KG het **nettogewicht** van de legeering.

Onder **gehalte** verstaat men dus het gedeelte van de legeering, dat zuiver goud is. Volgens het voorgaande kan men het gehalte bepalen door het nettogewicht te deelen door het brutogewicht.

Ook de kwaliteit van zilver wordt aangegeven door het gehalte.

Onder **fijn goud** en **fijn zilver** verstaat men goud en zilver, waarmede geen andere metalen samengesmolten zijn.

Het goud van onze gouden tientjes is van het gehalte 0,9; het zilver van den rijksdaalder, gulden en halven gulden van het gehalte 0,945.

De kwaliteit van alcohol wordt aangegeven, door te zeggen, hoeveel percent van de geheele hoeveelheid zuivere alcohol is.

Digitized by Google

4 L alcohol van 80 % bevatten dus 4×80 of 320 cL zuiveren alcohol.

De kwaliteit van andere stoffen wordt aangegeven door den prijs.

De mengingrekening dient, om de waarde van een mengsel te bepalen, indien men weet, welke hoeveelheden bij elkaar gemengd zijn, en van welke waarde ze zijn. Ook dient ze, om de grootte en de waarde van een der gemengde hoeveelheden te bepalen, indien men grootte en waarde van het geheele mengsel en van de overige bijeengemengde hoeveelheden kent. Ten slotte leert de mengingrekening ons nog de verhouding kennen volgens welke hoeveelheden bij elkaar gemengd moeten worden, ten einde een hoeveelheid van bepaalde kwaliteit te verkrijgen.

Voorbeelden.

1. *Iemand mengt bij elkaar* 14 *L wijn van* 65 *ct.*, 6 *L van* 75 *ct. en* 10 *L van* 53 *ct. per L. Hoeveel kost* 1 *L van het mengsel?*

Oplossing.

14 L	wijn à	65 ct. =	910 ct.
6 L	„ à	75 „ =	450 „
10 L	„ à	53 „ =	530 „
30 L	mengsel	=	1890 ct.

1 L mengsel kost dus 1890 ct. : 30 = 63 ct.

Opmerking. Bij deze oplossing is geen rekening gehouden met het verschijnsel, dat bij het mengen van vloeistoffen inkrimping plaats heeft.

2. *Van welk gehalte is het goud, dat men moet samensmelten met* 4,5 *KG goud van het gehalte* 0,8 *en* 3 *KG goud van het gehalte* 0,9, *ten einde* 10 *KG van het gehalte* 0,78 *te verkrijgen?*

Oplossing.

10 KG van het gehalte 0,78 moet bevatten $10 \times 0{,}78$ KG of 7,8 KG fijn goud.

4,5 KG	van het gehalte	0,8 =	3,6 KG fijn goud.
3 „	„ „	0,9 =	2,7 „ „ „
7,5 KG	bevatten dus		6,3 KG fijn goud.

Er moet dus nog 10 − 7,5 of 2,5 KG bijgevoegd worden, en deze moeten 7,8 — 6,3 of 1,5 KG fijn goud bevatten.

Deze 2,5 KG moeten dus van het gehalte $\frac{1,5}{2,5}$ of 0,6 zijn.

Digitized by Google

3. *Hoeveel KG thee van* 2,25 *gld. per KG moet men voegen bij* 36 *KG thee van* 2 *gld., om thee van* 2,10 *gld. per KG te verkrijgen?*

Oplossing.

Elke KG van 2 gld. neemt door het mengen 10 ct. toe in waarde; de 36 KG dus 36×10 ct. of 360 ct. De thee van 2,25 gld. moet dus in waarde 360 ct. afnemen, en daar elke KG van 2,25 gld. door het mengen 15 ct. in waarde afneemt, moeten er dus $\frac{360}{15}$ of 24 KG van 2,25 gld. bijgevoegd worden.

Opmerking. Uit de gelijkheid $36 \times 10 = 24 \times 15$ kan men met behulp van § 145 der evenredigheden afleiden:

$$24 : 36 = 10 : 15$$

$$\text{of } 24 : 36 = \frac{1}{15} : \frac{1}{10}.$$

Nu stellen 24 KG en 36 KG respectievelijk de hoeveelheden voor van 2,25 en 2 gld. per KG; 10 ct. en 15 ct. respectievelijk de prijsveranderingen, die een KG van 2 gld. en een KG van 2,25 gld. ondergaan door het mengen, waaruit volgt:

De bijeengevoegde hoeveelheden zijn omgekeerd evenredig met de prijsveranderingen, die een KG van elke soort door het mengen ondergaat.

4. *Iemand mengt onder elkaar* 13 *L wijn van* 68 *ct. en* 6 *L wijn van* 56 *ct. per L, en voegt daarbij eenige L wijn van* 166 *ct. per L en water, doch* 1 *L water meer dan wijn. Hij verkoopt het mengsel met* 20 % *winst voor* 90 *cent den L. Hoeveel L wijn van* 166 *ct. heeft hij er bijgevoegd?*

Oplossing.

De	13 L	wijn van	68 ct.	kosten	13×68 ct. $= 884$ ct.
	6 L	„ „	56 ct.	„	6×56 ct. $= 336$ ct.
	19 L	mengsel kosten dus			1220 ct.

Voegt hij hierbij nu 1 L water, dan heeft hij 20 L wijn, die hem 1220 ct., dus 61 ct. per L, kosten.

Hierbij moet hij nu voegen wijn van 166 ct. per L en water, doch van beide een gelijke hoeveelheid. Door het mengen van 1 L wijn van 166 ct. en 1 L water ontstaan 2 L wijn van 83 ct. Het aantal L van 166 ct. vormt dus met dezelfde hoeveelheid water een mengsel van 83 ct. per L.

Digitized by Google

Het geheel verkoopt hij met 20 % winst voor 90 ct. den L; dus het kost hem $\frac{100}{120} \times 90$ ct. of 75 ct. per L.

De vraag is dus: Hoeveel L van 83 ct. moet men bij 20 L van 61 ct. voegen, om een mengsel van 75 ct. per L te krijgen?

Elke L van 83 ct. gaat in waarde 8 ct. achteruit; elke L van 61 ct. in waarde 14 ct. vooruit, derhalve verhouden zich de hoeveelheden als 14 : 8 of 7 : 4.

De eerste hoeveelheid is dus $\frac{7}{4} \times$ de tweede. Het aantal L van 83 ct. is dus $\frac{7}{4} \times 20$ of 35. De helft hiervan zijn L van 166 ct. Hij heeft er dus 17,5 L van 166 ct. bijgevoegd.

Opgaven.

1. Een goudsmid mengt onder elkaar 7 HG goud van het gehalte 0,85 en 3 HG van het gehalte 0,65. Van welk gehalte is het mengsel?
2. Iemand mengt onder elkaar 15 L alcohol van 78 %, 7 L van 90 % en 3 L. water. Hoe sterk is het mengsel?
3. Hoeveel L water moet men voegen bij 5 L wijn van 98 ct. den L om wijn van 70 ct. den L te verkrijgen?
4. Hoeveel HG alliage moet men bij 6 KG zilver van het gehalte 0,945 voegen, om zilver van het gehalte 0,7 te krijgen?
5. Hoeveel L spiritus van 50 % moet men bij 84 L van 63 % voegen om spiritus van 60 % te krijgen?
6. Iemand mengt twee soorten tabak van 72 ct. en 45 ct. per $\frac{1}{2}$ KG. Het mengsel kost gemiddeld 120 ct. per KG. Zoo hij van de eerste soort 9 KG meer heeft dan van de tweede soort, hoeveel KG van elke soort heeft hij dan gemengd?
7. Iemand bezit eenige kwartjes en rijksdaalders, samen 72 stuks. Indien hij alles tegen guldens inwisselt, heeft hij hetzelfde aantal geldstukken. Hoeveel kw. en rijksd. bezit hij?
8. Een ander bezit eenige rijksdaalders en eenige kwartjes, samen ter waarde van 50 gld. Indien hij in het geheel 74 geldstukken bezit, hoeveel rijksd. en hoeveel kw. bezit hij dan?
9. Iemand heeft $\frac{1}{2}$ HL spiritus van 76 %. Hoeveel L moet hij er af tappen en vervangen door L van 86 %, ten einde een mengsel te verkrijgen van 80 %?
10. Een goudsmid heeft goud van het gehalte 0,9 en een hoeveel-

Digitized by Google

heid koper, die 48 DG kleiner is. Hij mengt deze hoeveelheden door elkaar en krijgt nu goud van het gehalte 0,72. Hoeveel HG goud heeft hij?

11. Iemand heeft wijn van 57 ct. per L. Hij voegt er 54 L bij, bestaande uit eenige L van 54 ct. en $1\frac{1}{3}$ maal zooveel L van 68 ct., waardoor hij L van 60 ct. verkrijgt. Hoeveel L van 57 ct. mengde hij er bij?
12. Vroeger werd in Nederland het gehalte van goud en zilver uitgedrukt in karaten (vier en twintigste deelen). Hoe drukt men nu een gehalte van 22 karaten uit? En hoe werd vroeger het gehalte uitgedrukt, van het goud, waaruit onze gouden tientjes bestaan?
13. Hoeveel KG thee van 3 gld. per KG moet men voegen bij 30 KG van 2,50 gld. en 50 KG van 2,80 gld., om thee te krijgen van 2,90 gld. per KG?
14. Een schuld van 185 gld. wordt betaald met rijksdaalders, guldens en halve guldens, samen 150 stuks. Het aantal rijksdaalders staat tot dat der guldens als 2 : 3. Men vraagt het aantal halve guldens?
15. Een koopman mengt 6 L wijn van 74 ct. en 13 L van 42 ct. met een hoeveelheid wijn van 1,18 gld. en water, doch 1 L water meer dan wijn. Hij verkrijgt daardoor een mengsel, dat hem 54 cent per L kost. Hoeveel L wijn van 1,18 gld. voegde hij er bij?
16. Iemand mengde eenige KG tabak van 112 ct per KG bij een 12 KG kleinere hoeveelheid van 132 ct. per KG en verkocht het mengsel met 15 % winst voor 138 ct. per KG. Hoeveel KG tabak van 112 ct. nam hij?
17. Iemand voegt eenige KG thee van 1,24 gld. per KG en een andere hoeveelheid van 1,60 gld. bij elkaar. De hoeveelheden verhouden zich als 5 : 4. Hierbij voegt hij 100 KG van 1,97 gld. en verkrijgt nu een mengsel, dat hij met 20 % winst kan verkoopen voor 2,04 gld. per KG. Hoeveel KG van 1,24 gld. neemt hij?
18. Een wijnkooper heeft 50 L wijn van 50 cent en nog eenige L van 60 ct. per L. Hij giet dien wijn onder elkander en doet er 30 L water bij. Als hij den wijn tegen 56 ct. verkoopt en 15 gld. wint, vraagt men naar de hoeveelheid wijn van 60 ct.
19. Een winkelier koopt 150 KG suiker à 60 ct. per KG en een tweede hoeveelheid van andere kwaliteit. Hij mengt ze door

Digitized by Google

elkander en verkoopt van de gemengde suiker het $\frac{1}{16}$ gedeelte tegen 68 ct. per KG, en de rest, die 75 KG bedraagt, tegen 70 ct. per KG. Hierdoor wint hij $9\frac{3}{5}$ %. Hoe duur kost hem de tweede soort?

20. Een oud zilveren voorwerp, zwaar 1,19 KG, wordt geruild tegen zijn gewicht aan kwartjes, hetgeen voor den eigenaar 14,96 gld. minder opbrengt, dan wanneer de marktprijs van 105 gld. per KG zuiver zilver in rekening was gebracht. Als het gewicht van een kwartje $3\frac{1}{2}$ gram is, wordt gevraagd naar het gehalte van bedoeld voorwerp.
21. Iemand koopt een hoeveelheid rogge, waarvan het $\frac{4}{5}$ gedeelte $2\frac{1}{2}$ HL meer bedraagt dan het $\frac{3}{4}$ gedeelte, voor $9\frac{3}{8}$ gld. de 25 DL. Hij verkoopt de rogge in twee partijen; de eerste partij tegen 3,80 gld., de tweede tegen 4,20 gld. per HL. Uit hoeveel HL bestaat elke partij, zoo hij in het geheel 4% wint?
22. Iemand heeft eenige HL wijn, het $\frac{3}{8}$ deel van 7 en de rest van 4,5 ct. de dL. Hij mengt dien wijn door elkaar en doet er 1,5 DL water bij. Als nu dat mengsel tegen 0,0065 gld. per cL. verkocht wordt, dan wint hij 69,75 gld. Men vraagt naar het oorspronkelijk aantal HL.
23. Iemand heeft 4700 DG thee van 18 ct. per HG en 7 KG thee à 2,571428 gld. per KG. Indien hij deze hoeveelheden wil mengen met thee van $2\frac{9}{20}$ gld. per KG, hoeveel KG moet hij dan van de laatste soort nemen, opdat het mengsel een waarde verkrijge van 0,002 gld. per G?
24. Iemand verkoopt tabak voor 0,80 gld., suiker voor 0,75 gld. en koffie voor 1,20 gld. per KG. In het geheel ontvangt hij 160 gld. voor 165 KG. Hoeveel KG heeft hij van elke soort, als hij 35 KG koffie meer verkoopt dan KG suiker?

Digitized by Google

GEMIDDELDE VERVALTIJD.

183. Onder den gemiddelden vervaltijd van eenige kapitalen verstaat men den tijd, waarop die kapitalen betaald kunnen worden, zonder dat een der betrokken personen daarbij schade lijdt aan interest.

Is A b.v. aan B schuldig 300 gld. te betalen over 8 maanden, en 200 gld. te betalen over 3 maanden, dan kan hij even goed de som dier kapitalen of 500 gld. over 6 maanden voldoen. De 300 gld. betaalt hij dan 2 maanden te vroeg en daardoor heeft hij van B den interest van 300 gld. gedurende 2 maanden te vorderen. De 200 gld. betaalt hij 3 maanden te laat, en daardoor is hij aan B den interest van 200 gld. gedurende 3 maanden schuldig. Nu is de interest van 300 gld. gedurende 2 maanden dezelfde als de interest van 200 gld. gedurende 3 maanden. Hij wint noch verliest dus interest, welk het percent rente ook is.

Is A aan B schuldig 700 gld. te betalen over 6 maanden, en B aan A 400 gld. te betalen over $4\frac{1}{2}$ maand, dan kunnen ze even goed beiden hun schulden voldoen (d. w. z. A betaalt het verschil of 300 gld.) over 8 maanden. A betaalt zijn 700 gld. dan 2 maanden te laat en is dus aan B schuldig den interest van 700 gulden gedurende 2 maanden. B betaalt de 400 gld. $3\frac{1}{2}$ maand te laat en is dus aan A schuldig den interest van 400 gld. gedurende 3 maanden. Nu is de interest van 700 gld. gedurende 2 maanden even groot als de interest van 400 gld. gedurende $3\frac{1}{2}$ maand. Geen van beiden lijdt dus schade, als A het verschil of 300 gld. na 8 maanden betaalt.

Men heeft dus twee soorten van vraagstukken:

A. Iemand is eenige kapitalen op verschillende tijden schuldig, en

Digitized by Google

dan wordt gevraagd, wanneer hij de som dier kapitalen in eens moet voldoen, zonder dat hij schade of voordeel heeft.

B. Twee personen zijn elkaar verschillende kapitalen op verschillende tijden schuldig, en dan wordt gevraagd, wanneer een van hen het verschil der kapitalen moet voldoen, zonder dat een van beiden schade lijdt.

A. Voorbeelden.

184. 1. A *is aan* B *schuldig* 100 *gld. te betalen over* 3 *maanden,* 300 *gld. over* 5 *maanden en* 600 *gld. over* 7 *maanden. Wanneer moet hij die sommen in eens voldoen, als geen van beiden schade zal lijden?*

Oplossing.

Wanneer A contant de $100 + 300 + 600$ of 1000 gld. aan B betaalde, dan zou A van B te vorderen hebben:

Interest van 100 gld. ged. 3 md. = Int. van 300 gld. ged. 1 md.
„ „ 300 „ „ 5 „ = „ „ 1500 „ „ 1 „
„ „ 600 „ „ 7 „ = „ „ 4200 „ „ 1 „
Int. van 6000 gld. ged. 1 md.

Geeft B hem dien interest, dan lijdt geen van beiden schade. Doet B dit niet, dan wacht A met het betalen van de 1000 gld. zoo lang, totdat deze evenveel interest opgebracht hebben als 6000 gld. in 1 md. De gemiddelde vervaltijd is dus $\frac{6000}{1000}$ of 6 maanden.

Opmerking. De produkten 300, 1500 en 4200, die verkregen zijn door de kapitalen te vermenigvuldigen met den tijd, waarna ze betaald moeten worden, heeten **renteprodukten.** Uit de voorgaande oplossing blijkt nu, **dat de gemiddelde vervaltijd verkregen wordt door de som der renteprodukten te deelen door de som der kapitalen.**

2. A *moet aan* B *betalen* 300 *gld. op* 16 *Mei en* 500 *gld. op* 18 *Juni. Wanneer moet hij die sommen in eens betalen, zonder dat een van beiden schade lijdt?*

Oplossing.

Indien A de 800 gld. op 16 Mei betaalt, heeft hij van B te vorderen:

Interest van 300 gld. ged. 0 dg. = Int. van 0 gld. ged. 1 dg.
„ „ 500 „ „ 32 dg. = „ „ 16000 gld. „ 1 dg.
Int. van 16000 gld. ged. 1 dg.

Digitized by Google

A mag dus met de betaling der 800 gld. wachten, tot deze evenveel interest hebben opgebracht als 16000 gld. ged. 1 dg. De gemiddelde vervaldag is dus $\frac{16000}{800}$ of 20 dagen na 16 Mei, dus 6 Juni.

Opmerking. Waren we begonnen met te onderstellen, dat A op een anderen datum, b.v. 1 Mei, de 800 gld. betaalde, dan waren de rentedagen niet 0 en 32, maar 15 meer, dus 15 en 47. De renteprodukten waren dan niet 0 en 16000, maar 15×300 en en $16000 + 15 \times 500$.

De som der renteprodukten was dan $16000 + 15 \times 300 + 15 \times 500$ of $16000 + 15 \times 800$.

Het aantal dagen na 1 Mei, waarop dan de som der kapitalen voldaan moet worden, is dus $\frac{16000 + 15 \times 800}{800}$ of $20 + 15$.

$20 + 15$ dagen na 1 Mei geeft echter denzelfden gemiddelden vervaldag als 20 dagen na 16 Mei. Hieruit volgt, dat het onverschillig is, op welken datum A ondersteld wordt de som der kapitalen te betalen.

Wij zijn begonnen te onderstellen, dat A op 16 Mei, d. i. den eersten der beide gegeven vervaldagen, alles betaalt, omdat wij dan de kleinste renteprodukten krijgen.

3. A *moet op* 19 *Januari aan* B 1400 *gld. betalen. Hij betaalt* op 9 *Januari reeds* 900 *gld. Wanneer moet hij zonder nadeel voor beiden de rest betalen?*

Oplossing.

Daar A de 900 gld., die hij op 19 Januari moet betalen, reeds op 9 Januari voldoet, heeft hij van B 10 dagen rente van die 900 gld. te vorderen. Geeft B hem deze rente, dan zal A de rest of 500 gld. op 19 Januari voldoen. Doet B dit niet, dan betaalt A die 500 gld. zooveel dagen na 19 Januari, dat de rente even groot is als die van 900 gld in 10 dagen.

Daar nu twee kapitalen in verschillende tijden dezelfde rente moeten opbrengen, zijn de tijden omgekeerd evenredig met de kapitalen:

$$T_1 : T_2 = \frac{1}{K_1} : \frac{1}{K_2}$$

$$10 : T_2 = \frac{1}{900} : \frac{1}{500},$$

waaruit volgt: $T_2 = 18$.

A mag dus de 500 gld. 18 dagen na 19 Januari betalen. Daar-

Digitized by Google

het bij renteberekening gewoonte is, de maand op 30 dagen te stellen, moet de betaling dus op 7 Februari geschieden.

Andere oplossing.

Indien A op 9 Januari de 1400 gld. betaalt, heeft hij van B nog te vorderen den interest van 1400 gld. gedurende 10 dagen of den interest van 14000 gld. gedurende 1 dag. Geeft B hem die rente, dan is A tevreden. Ook wil A hem op 9 Januari wel 900 gld. betalen, mits hij met het betalen der overige 500 gld. zoo lang mag wachten, tot deze evenveel interest hebben opgebracht als 14000 gld. in 1 dag. Hij betaalt de 500 gld. dus $\frac{14000}{500}$ of 28 dagen na 9 Januari; d. i. 7 Februari.

Opgaven.

Bereken den gemiddelden vervaltijd van:

1. 475 gld. te betalen na 14 maanden, 725 gld. na 6 maanden en 800 gld. na $3\frac{3}{4}$ maand.
2. 305 gld. contant, 475 gld. na 8 maanden en 220 gld. na 10 maanden.
3. 225 gld. te betalen op 6 Mei en 90 gld. op 27 Mei.

4. Iemand moet 500 gld. na 3 maanden betalen. Hij betaalt contant 125 gld. Wanneer moet hij de rest voldoen?
5. Een ander is schuldig 2000 gld. te betalen na $8\frac{1}{2}$ maand. Hij betaalt na 5 maanden 600 gld. Wanneer moet hij de rest voldoen?
6. Iemand moet een som betalen over 7 maanden. Hij betaalt $\frac{3}{5}$ der schuld na 3 maanden. Wanneer moet hij de rest voldoen?
7. A is schuldig 225 gld. te betalen over $3\frac{1}{2}$ maand en 375 gld. te betalen over $7\frac{1}{2}$ maand. Hij betaalt contant 200 gld. Wanneer moet hij de rest voldoen?
8. Iemand is schuldig 600 gld. te betalen over 5 maanden. Hoeveel moet hij contant betalen, om de rest over $7\frac{1}{2}$ maand te kunnen voldoen?
9. Een ander moet een schuld voldoen over 7 maanden. Welk gedeelte moet hij over 4 maanden voldoen, om de rest over 9 maanden te kunnen voldoen?
10. A moet betalen: 500 gld. over 4 maanden, 700 gld. over 5 md. en 300 gld. over 8 md. Hij betaalt 500 gld. na 18 dagen en 200 gulden na 3 maanden. Wanneer moet hij de rest voldoen?

Digitized by Google

11. Van zijn schuld moet iemand betalen $\frac{1}{5}$ na 1 maand, de helft na 4 md. en het overige na 6 md. Hij betaalt $\frac{3}{5}$ na 3 md. en 10 dg. Wanneer moet hij de rest voldoen?

B. Voorbeelden.

185. 1. A *is aan* B *schuldig* 700 *gld. te betalen over* 6 *maanden*; B *moet aan* A *betalen* 400 *gld. over* 3 *maanden. Wanneer kunnen zij hun schulden vereffenen, zonder dat een van beiden schade lijdt?*

Oplossing.

Indien A aan B de 700 gld. en B aan A de 400 gld., of wat op hetzelfde neerkomt, A aan B 300 gld. contant betaalt, dan heeft:

A te vord. v. B Int. v. 700 gld. ged. 6 md. = Int. v. 4200 gld. ged. 1 md.
en B „ A „ „ 400 „ „ 3 „ = „ „ 1200 „ „ 1 „

zoodat A nog te vorderen heeft van B: Int. v. 3000 gld. ged. 1 md.

A mag dus met het betalen van de 300 gld. wachten, tot deze evenveel interest opgebracht hebben als 3000 gld. in 1 md. De vereffening heeft dus plaats na $\frac{3000}{300} = 10$ maanden.

Opmerking. Uit deze oplossing blijkt, **dat de gemiddelde vervaldag gevonden wordt, door het verschil der renteprodukten te deelen door het verschil der kapitalen.**

2. A *is aan* B *schuldig* 700 *gld. te betalen over* 2 *maanden*, B *aan* A 300 *gld. te betalen over* 8 *maanden. Wanneer kunnen zij hun schulden vereffenen?*

Oplossing.

Indien zij contant hun schuld vereffenen (m. a. w. als A het verschil of 400 gld. betaalt), dan heeft:

A te vord. v. B Int. v. 700 gld. ged. 2 md. = Int. v. 1400 gld. ged. 1 md.
en B „ A „ „ 300 „ „ 8 „ = „ „ 2400 „ „ 1 „

zoodat B nog van A te vorderen heeft: Int. v. 1000 gld. ged. 1 md.

Indien A dus 400 gld. contant betaalt, heeft B nog den interest van 1000 gld. ged. 1 md. of van 400 gld. ged. $2\frac{1}{2}$ maand te vorderen; dus had de vereffening $2\frac{1}{2}$ maand geleden moeten plaats hebben.

Opmerking. In het eerste voorbeeld had A, die de grootste

Digitized by Google

som schuldig was, ook de meeste rente te vorderen. De vereffening moest toen **na** eenigen tijd plaats hebben. In het tweede voorbeeld had A, die de grootste som schuldig was, de minste rente te vorderen. De vereffening moest toen eenigen tijd **geleden** plaats gehad hebben.

Opgaven.

1. A is aan B schuldig 1200 gld. te betalen na 7 maanden, B aan A 700 gld. te betalen na 2 maanden. Wanneer kunnen zij tegelijk hun schulden vereffenen?
2. A is aan B schuldig 1300 gld. te betalen na 2 maanden, B aan A 700 te betalen na 8 maanden. Wanneer kunnen zij tegelijk hun schulden vereffenen?
3. A is aan B schuldig: B is aan A schuldig:
   200 gld. te bet. na 5 md. 400 gld. te bet. na 5 md.
   300 „ „ „ „ 7 „ 200 „ „ „ „ 7 „
   500 „ „ „ „ 9 „ 100 „ „ „ „ 8 „
   Wanneer kunnen zij tegelijk hun schulden vereffenen?
4. A is aan B schuldig 800 gld. te betalen op 1 April 1902, B aan A 500 gld. te betalen op 1 Juli 1902. Wanneer kunnen zij tegelijk hun schulden vereffenen?
5. A is aan B schuldig: B is aan A schuldig:
   600 gld. te bet. 1 Mei 1902. 1000 gld. te bet. 1 April 1902.
   900 „ „ „ 1 Juni 1902. 700 „ „ „ 1 Juli 1902.
   500 „ „ „ 1 Juli 1902.
   Op welken datum kunnen zij hun schulden vereffenen?

Digitized by Google

WINST EN VERLIES.

186. Wanneer A te Nijmegen een partij goederen koopt te Rotterdam voor 3000 gld., en om die goederen te Nijmegen te krijgen, nog 100 gld. aan onkosten betaalt, dan zegt men dat de inkoopsprijs der goederen 3100 gld. is.

Onder **inkoopsprijs** verstaat men dus: hetgeen de partij bij inkoop kost, vermeerderd met alle onkosten.

Verkoopt hij later die partij te Deventer voor 3500 gld., maar heeft hij 75 gld. onkosten moeten maken om ze te kunnen verkoopen, dan zegt men dat de verkoopsprijs der goederen 3500—75 of 3425 gld. is.

Onder **verkoopsprijs** verstaat men: hetgeen de partij bij verkoop opbrengt, verminderd met alle onkosten bij den verkoop gemaakt.

Is nu de verkoopsprijs grooter dan de inkoopsprijs, dan zegt men dat er **winst behaald** is. Is de inkoopsprijs grooter dan de verkoopsprijs, dan zegt men dat er **verlies geleden** is.

A heeft dus 3425—3100 of 325 gld. gewonnen. Men kan echter niet zeggen, dat deze 325 gld. **handelswinst** is. Onderstelt men, dat de inkoopssom op 1 Maart werd voldaan, en de verkoopssom op 1 Juli werd ontvangen, dan zou A door op 1 Maart de 3100 gld. te beleggen (ter leen geven, effecten koopen), op 1 Juli daarvan een zekere rente genoten hebben.

Stelt men de rente, die men bij een soliede belegging krijgen kan, op 4 % per jaar, dan zou A door niet te handelen, in die 4 maanden $\frac{4}{3}$ % of $\frac{4}{3} \times 31$ gld. of 41,33 gld. rente genoten hebben. Deze rente geniet A dus nu niet.

Zijn handelswinst is dus 325—40,33 of 283,67 gld.; m. a. w. **de handelswinst wordt verkregen door het verschil tusschen verkoop en inkoop te verminderen met het renteverlies.**

De 3100 gld., die hij bij inkoop betaald heeft, hebben hem dus

Digitized by Google

283,67 gld. winst verschaft. Hij heeft met dien handel dus $\frac{283,67}{31}$ of 9,15 % (indien men het percent in honderdste deelen nauwkeurig verlangt te weten) gewonnen in den tijd van 4 maanden.

Indien de inkoopsprijs kleiner is dan de verkoopsprijs, is het duidelijk, dat het verlies door het renteverlies nog grooter wordt.

Het is echter ook mogelijk, dat men rente winnen kan. Onderstelt men, dat A op 1 Jan. een partij koopt voor 3100 gld. te betalen op 1 April en dat hij deze partij op 1 Februari à contant verkoopt voor 3425 gld., dan heeft hij de verkoopssom reeds 2 maanden vroeger ontvangen, dan hij de inkoopssom voldoet. Zijn winst moet nu vermeerderd worden met de rente, die 3100 gld. in 2 maanden oplevert. Rekent men weer de rente van belegging op 4 % per jaar dan is zijn rentewinst dus $\frac{2}{3} \times 31$ gld. of 20,67 gld. Zijn handelswinst is dus 325 + 20,67 of 345,67 gld.

Wordt de inkoopssom later betaald, dan de verkoopssom ontvangen wordt, dan wordt de handelswinst verkregen, door het verschil tusschen verkoop en inkoop te vermeerderen met de rentewinst.

Indien de inkoopssom kleiner is dan de verkoopssom, is het duidelijk, dat het verlies door deze rentewinst geringer wordt.

Voorbeeld.

Iemand koopt een partij koffie van 6400 *KG netto à* 55 *ct. per KG te betalen na* 2 *maanden en maakt bij den inkoop* 20 *gld. onkosten. Hij brandt die partij, waardoor zij* 15 % *in gewicht verliest en verkoopt ze na* 3 *maanden à* 75 *ct. per KG te betalen na* 1 *maand. Hoeveel wint hij met dien handel, als hij bij den verkoop* 15 *gld. onkosten maakt en voor renteverlies* 4 % *gerekend wordt?*

Oplossing.

De 6400 KG kosten 6400 × 55 ct. = 3520 gld., de onkosten bij den inkoop bedragen 20 gld.; dus is de inkoopsprijs 3540 gld.

Door het branden gaan 15 % of 960 KG verloren en dus worden er verkocht 6400 — 960 of 5540 KG. Deze brengen à 75 cent 4155 gld. op. Hij maakt echter 15 gld. onkosten, zoodat de verkoopsprijs is 4155 — 15 of 4140 gld.

Zijn winst is dus 4140 — 3540 of 600 gld.

Digitized by Google

Zijn geld is 3 + 1 − 2 of 2 maanden in den handel geweest, dus het renteverlies is $\frac{2}{3}$ % van 3540 gld. of 23,60 gld.

Zijn handelswinst is dus 600 — 23,60 of 576,40 gld.

Wij schrijven deze oplossing als volgt op:

Verkoop van $\frac{85}{100} \times 6400$ of 5540 KG à 75 ct. = 4155 gld.

af onkosten 15 „

= 4140 gld.

Inkoop van 6400 KG à 55 ct. = 3520 gld.

bij onkosten 20 „

= 3540 „

Winst = 600 gld.

af renteverlies ged. 3 + 1 − 2 md. à 4 % = $\frac{2}{3}$ % of 23,60 „

Handelswinst = 576,40 gld.

Wanneer eenige personen verschillende kapitalen ingelegd hebben om daarmede handel te drijven, dan wordt doorgaans vooraf bepaald, dat ieder een zeker percent 's jaars van zijn kapitaal zal genieten. Verder worden de winsten en verliezen gelijkelijk verdeeld.

Voorbeelden.

1. A, B *en* C *leggen voor een gemeenschappelijken handel respectievelijk* 1600, 2000 *en* 2400 *gld. in, onder voorwaarde, dat ieder* 6 % *rente 's jaars zal genieten, en dat verder de winsten en verliezen gelijkelijk zullen verdeeld worden. Hoeveel krijgt elk van de* 210 *gld., die na verloop van* 9 *maanden gewonnen zijn?*

Oplossing.

In die 9 maanden krijgt elk $\frac{3}{4} \times 6$ of $4\frac{1}{2}$ % rente.

A krijgt dus $16 \times 4\frac{1}{2}$ of 72 gld., B $20 \times 4\frac{1}{2}$ of 90 gld. en C $24 \times 4\frac{1}{2}$ of 108 gld., samen 270 gld.

Wanneer deze uitgekeerd zijn, gaat de winst van 210 gld. over in een verlies van 270 — 210 of 60 gld. Hiervoor moet ieder 20 gld. bijpassen.

A ontvangt dus 72 gld. en draagt 20 gld. bij in het verlies, zoodat hij 72 — 20 of 52 gld. krijgt.

Digitized by Google

B. krijgt 90 — 20 of 70 gld.
C. ontvangt 108 — 20 of 88 gld.

2. *Een winkelier verkoopt een partij koffie in twee keeren. Den eersten keer verkoopt hij evenveel malen* 5 *KG à* 1,20 *gld. als den tweeden keer* 2 *KG à* 0,95 *gld. per KG. Bij den eersten verkoop wint hij tienmaal zooveel, als hij bij den tweeden verkoop verliest. Hoe groot is de geheele partij, als hij ten slotte* 18 *gld. wint?*

Oplossing.

Uit de opgave volgt:

Winst op 5 KG van het eerste deel: verlies op 2 KG van het tweede deel $= 10 : 1$,

waaruit volgt:

Winst per KG van het eerste deel: verlies per KG van het tweede deel $= 4 : 1$.

Voor 1 KG van het eerste gedeelte ontvangt hij 25 ct. meer dan voor 1 KG van het tweede gedeelte, dus is 25 ct. gelijk aan 5maal het verlies op 1 KG van het tweede gedeelte.

Op 1 KG van het tweede gedeelte verliest hij dus 5 ct. en op 1 KG van het eerste gedeelte wint hij 20 ct.

De gemiddelde winst per KG is dus $\frac{5 \times 20 - 2 \times 5}{7}$ ct. $= \frac{90}{7}$ ct.;

de geheele winst is 18 gld., dus is de partij groot:

$$1800 \times \frac{7}{90} = 20 \times 7 = 140 \text{ KG.}$$

Opmerking. Wij hadden ook op eenvoudiger wijze er toe kunnen komen, dat de inkoopsprijs van 1 KG 1 gld. is.

Daar de inkoopsprijs van 1 KG_1 = verlies op 4 KG_2 is, zal hij niet winnen of verliezen, als hij 1 KG. en 4 KG_2 verkoopt. Derhalve is $1 \times 1{,}20 + 4 \times 0{,}95$ of 5 gld. = den inkoopsprijs van $4 + 1$ of 5 KG. De inkoopsprijs van 1 KG is dus 1 gld.

Opgaven.

Bereken de handelswinst (verlies) op de volgende partijen bij een rentestand van 4 % *'s jaars*:

1. Inkoopsprijs 300 gld,, verkoopsprijs 340 gld.; het geld is drie maanden in den handel.

Digitized by Google

2. Inkoopsprijs 450 gld., verkoopsprijs 500 gld.; de verkoopssom wordt 1 maand voor de inkoopssom voldaan.
3. Inkoopsprijs 1200 gld. per 1 Juli, verkoopsprijs 1120 gld. per 1 September.
4. Inkoopsprijs 320 gld. per 1 Juni, verkoopsprijs 300 gld. per 1 Maart.

5. A koopt een partij koffie per 3 md. voor 3420 gld. en maakt bij den inkoop 30 gld. onkosten. Hij verkoopt die partij 1 maand later à contant voor 3600 gld. en maakt bij den verkoop 20 gld. onkosten. Hoeveel percent wint hij met dien handel, als men voor rente $4\frac{1}{2}$ % rekent?
6. Iemand koopt 120 M linnen à 75 ct. Het krimpt 15 %. Voor hoeveel moet hij den M verkoopen om $13\frac{1}{3}$ % te winnen?
7. Een ander koopt 150 KG koffieboonen à 64 cent. Hij brandt ze en verkoopt de KG à 90 ct., waardoor hij $12\frac{1}{2}$ % wint. Hoeveel % heeft de koffie door het branden aan gewicht verloren?
8. Iemand koopt een partij linnen voor 80 ct. per M. Hij ontvangt 5 M meer dan hij gekocht had, doch het linnen is zoo slecht, dat hij den M tegen 60 ct. moet verkoopen. Zoo hij nu 21 gld. verliest, vraagt men hoeveel M. hij verkoopt.
9. A kocht een partij thee, bruto 5340 KG, tarra 3 % tegen 1,60 gld. per KG netto. Hij verkocht deze partij tegen 1,65 gld. per KG netto en gaf 2 % korting voor contante betaling. Hoeveel won hij, indien hij bij den inkoop 15 en bij den verkoop 20 gld. onkosten maakte?
10. De winst op zekere partij bedraagt 72 gld. of 3 % van den inkoop. Had men 35 ct. per HL meer bedongen, dan zou de winst $\frac{1}{17}$ van den inkoop geweest zijn. Hoe groot is de partij?
11. Drie personen A, B en C drijven handel. A legt in 400 gld. meer dan B, terwijl B en C samen 4400 gld. inleggen. Van de winst, groot 432 gld., ontvangt C 120 gld. Hoeveel krijgen A en B van de winst?
12. A, B en C hebben respectievelijk 2000, 2400 en 3000 gld. ingelegd, om mede te handelen. Het geld van A blijft 6, dat van B 7, dat van C 8 maanden in den handel. Ze spreken af, dat ieder 6 % rente per jaar van zijn kapitaal zal genieten, en dat de winsten en verliezen verder gelijkelijk zullen verdeeld worden. Hoeveel komt ieder toe van de 368 gld. winst, die gemaakt is?

Digitized by Google

13. En hoe zou de verdeeling zijn, indien slechts 68 gld. gewonnen was?
14. En hoe, indien 52 gld. verloren was?
15. Een winkelier kocht eieren à 3 ct. per stuk. Hij verkocht ze ze gedeeltelijk à $3\frac{1}{2}$ en gedeeltelijk à $4\frac{1}{2}$ ct. per stuk, waardoor hij 30 % won. Welk gedeelte verkocht hij tegen $3\frac{1}{2}$ ct.?
16. Een andere winkelier kocht peren tegen $2\frac{1}{2}$ ct. per stuk. Een gedeelte verkocht hij de 3 voor 8 cent, een ander gedeelte dat bedorven was voor 1 cent per stuk. Indien hij 10 % verloor, welk gedeelte was dan bedorven?
17. Iemand koopt 360 KG koffie tegen 1 gld. per KG. Hij brandt ze en verkoopt nu de KG tegen 1,50 gld., waardoor hij $\frac{1}{15}$ van den inkoop wint. Hoeveel KG heeft de koffie door het branden aan gewicht verloren?
18. Iemand verkocht een partij waren met 4 % verlies. Had hij haar 55 gld. goedkooper ingekocht, dan zou hij nu $12\frac{1}{2}$ % gewonnen hebben. Als hij $37\frac{1}{2}$ ct. per KG betaald heeft, uit hoeveel KG bestond dan die partij?
19. Van een partij koren wordt de eene helft à 12 gld., de andere à 9 gld. per HL verkocht. Daardoor wordt op 5 HL van de eerste helft evenveel gewonnen, als op 7 HL van de tweede helft verloren wordt. Als de winst in het geheel 12 gld. bedraagt, vraagt men, hoe groot de geheele partij is.
20. Iemand koopt 900 KG van zekere koopwaar en verkoopt het $\frac{5}{6}$ deel à 2,50 gld., de rest à 1,75 gld. per KG. De winst van het eerste deel staat tot het verlies op het tweede deel als 40 : 7. Men vraagt, hoeveel de geheele partij bij inkoop kostte, en hoe groot de winst is.
21. Iemand koopt een partij koren. Van deze partij verkoopt hij hij 200 HL tegen 9,765 per HL; de winst daarop is $8\frac{1}{2}$ %. De rest wordt verkocht met een verlies van 5 %. Zoo hij in het geheel 32,50 gld. verliest, vraagt men naar de grootte der partij.
22. Van een partij koopwaren wordt $\frac{3}{8}$ deel tegen 80, de rest tegen 95 ct. per KG verkocht. Op een KG van 95 ct. wordt viermaal zooveel gewonnen, als op een KG van 80 ct. Zoo nu in het geheel 115 gld. gewonnen wordt, vraagt men, hoe groot de partij was.
23. Iemand verkoopt een partij zaad met $9\frac{3}{5}$ % winst en ontvangt zoodoende 685 gld. Hoeveel hebben 137 HL bij inkoop gekost,

Digitized by Google

als de winst op de geheele partij gelijk is aan den verkoopsprijs van 15 HL?

24. Iemand koopt een stuk laken van 5 gld. den Meter en is verplicht het te verkoopen voor 4 gld. per M. Bij uitmeting bevindt hij 5 M meer ontvangen te hebben, dan hij betaald had. Hij verliest echter nog $13\frac{1}{3}$ %. Hoe lang is het stuk?

25. Iemand heeft twee partijen aardappelen, samen groot 310 HL, gedeeltelijk van 3 gld., gedeeltelijk van 3,75 gld. per HL. Verkoopt hij den HL van beide partijen voor 3,5 gld., dan wint hij 35 gld. meer op de eerste partij, dan hij op de tweede verliest. Hoe groot is elke partij?

Digitized by Google

EFFECTENREKENING.

187. Niet altijd is het kapitaal van één persoon voldoende, om een onderneming te beginnen. Verschillende personen brengen dan kapitaal bijeen en vormen een zoogenaamde **maatschappij** of **naamlooze vennootschap**. Die personen heeten de **aandeelhouders**. Het kapitaal der naamlooze vennootschap is verdeeld in **aandeelen** van ronde sommen, b.v. 1000 gld., 500 gld., enz. Zulk een som heet de **nominale waarde** van het aandeel. De directie, die het beheer voert, wordt ter zijde gestaan en gecontroleerd door den raad van **commissarissen**. Jaarlijks op de **algemeene vergadering** van aandeelhouders wordt door hen verslag uitgebracht over den toestand der vennootschap, en rekening en verantwoording gedaan. Zij deelen dan ook mede, hoe groot de winst (of het verlies) is, in het afgeloopen jaar behaald (of geleden).

Doorgaans wordt niet de geheele winst onder de aandeelhouders verdeeld. Eerst wordt van de brutowinst afgenomen hetgeen volgens de **statuten** moet dienen tot vorming of versterking van het **reservefonds**. Bovendien ontvangen de commissarissen en de directie een gedeelte van de winst **(tantièmes)** voor hun bemoeiingen. Hetgeen er na al deze uitkeeringen nog overblijft, wordt onder de aandeelhouders verdeeld. Het deel, dat een aandeelhouder van de winst krijgt, heet **dividend,** en wordt uitgedrukt in percenten van de nominale waarde van het aandeel. Is het dividend b.v. $5\frac{3}{4}$ % dan ontvangt de houder van een aandeel van 1000 gld. nominaal, $5\frac{3}{4} \times 10$ of $57\frac{1}{2}$ gld. als winst.

Deze $57\frac{1}{2}$ gld. ontvangt hij op vertoon van zijn **dividendbewijs.** Bij elk aandeel behoort nl. een blad genummerde dividendbewijzen. Zijn deze alle uitbetaald, dan zendt hij aan de directie een strook papier in, **talon** genaamd, dat aan genoemd blad bevestigd is, en op welks vertoon hij een nieuw stel dividendbewijzen ontvangt.

Digitized by Google

Uit het voorgaande volgt, dat het dividend niet alle jaren even groot is. Hoe hooger het dividend is, des te grooter zal de prijs zijn, dien men bij verkoop van een aandeel ontvangt. De waarde van een aandeel is dus veranderlijk, en deze veranderlijke waarde heet **koers**. De koers wordt in Nederland uitgedrukt in percenten van de nominale waarde. Staan dus de aandeelen eener maatschappij op $93\frac{1}{2}$ %, dan wordt een aandeel van 1000 gld. nominaal betaald met $93\frac{1}{2} \times 10$ of 935 gld.

Is de koers 100 %, dan zegt men dat het aandeel **pari** staat; is de koers boven 100 %, dan spreekt men van **boven pari**; beneden 100 %, van **beneden pari**.

De handel in aandeelen geschiedt door tusschenkomst van commissionairs of makelaars, welke voor hun bemoeiingen **courtage** ontvangen. Deze bedraagt doorgaans $\frac{1}{8}$ % van de nominale waarde.

Laat men een aandeel koopen, dan moet men den commissionair behalve de koerswaarde ook nog de courtage betalen; deze verhoogt dus den inkoopsprijs.

Laat men een aandeel verkoopen, dan ontvangt men van den commissionair de koerswaarde, doch moet hem courtage betalen; deze vermindert dus den verkoopsprijs.

Zijn de aandeelen in buitenlandsche munt uitgedrukt, dan wordt de nominale waarde met behulp van de volgende standvastige **herleidingsgetallen** uitgedrukt in Hollandsch geld:

£ (pond sterling) .	= *f* 12.—	Oostenr. kroon . . .	= *f* 0.50
Franc, lire, peseta .	= „ 0.50	RM (Reichsmark) . .	= „ 0.60
Roebels (goud en zilv.)	= „ 2.—	Deensche kroon . .	= „ $\frac{2}{3}$.
Roebels (papier) . .	= „ 1.—		
fl°/w	= „ 1.20	$ (Amerik. dollar) .	= „ 2.50

Opmerking. Men meene niet, dat bovenstaande getallen de werkelijke waarde der vreemde munten aangeven.

Voorbeelden.

1. *Hoeveel moet men betalen voor zes aandeelen van* 1000 *gld. der Hollandsche IJzeren Spoorwegmaatschappij ? Koers* $120\frac{3}{4}$ %, *courtage* $\frac{1}{8}$ %.

Digitized by Google

Oplossing.

Nominale waarde 6000 gld.

Koers $120\frac{3}{4}$ % = $120\frac{3}{4} \times 60$ gld. = 7245,— gld.

bij courtage $\frac{1}{8}$ % v. 6000 gld. = 7,50 „

Inkoopsbedrag = 7252,50 gld.

2. *Hoe groot is het verkoopsbedrag van vijf aandeelen van RM* 3000 *der Duitsche Rijksbank? Koers* $157\frac{3}{4}$ %; *courtage* $\frac{1}{8}$ %.

Oplossing.

Nominale waarde RM 15000 = 9000 gld.

Koers $157\frac{3}{4}$ % = $157\frac{3}{4} \times 90$ gld. = 14197,50 gld.

af courtage $\frac{1}{8}$ % van 9000 gld. = 11,25 „

Verkoopsbedrag = 14186,25 gld.

Opgaven.

Bereken het inkoopsbedrag (courtage $\frac{1}{8}$ %*) van:*

1. 3 aandeelen Nederlandsche Bank van 1000 gld. nominaal, koers $173\frac{1}{8}$ %.
2. 2 aandeelen Medan-Tabakmaatschappij van 1000 gld. nominaal, koers $315\frac{5}{8}$ %.
3. 6 aandeelen Fransch-Oostenrijksche Spoorweg-Maatschappij van *fr.* 500 nominaal, koers 43 %.
4. 7 aandeelen Spoorweg Warschau—Weenen van R (papier) 100 nominaal, koers $109\frac{3}{8}$ %.

---

188. Heeft een naamlooze vennootschap ter uitbreiding van haar ondernemingen of om andere redenen geld noodig, dan tracht zij dit te verkrijgen door het sluiten eener **obligatieleening**. De rentevergoeding, die zij daarvoor aan haar schuldeischers moet betalen, hangt af van de soliditeit der naamlooze vennootschap, maar ook van den rentestand van het oogenblik.

Stel, dat een naamlooze vennootschap een 4 % obligatieleening aangaat van 1000000 gulden, dan moet zij aan den houder van een obligatie van 1000 gld. nominaal jaarlijks 40 gld. rente uitkeeren. Doorgaans betaalt zij dan elk half jaar 20 gld. Deze half jaarlijksche

Digitized by Google

rente kan de obligatiehouder innen door afgifte van een **coupon**. Bij elke obligatie behoort nl. een couponblad; op elke coupon staat uitgedrukt, hoe groot de rente is, en waar en wanneer men die innen kan. Met het uitbetalen dier rente belasten zich de bankiers, die daarvoor provisie van de naamlooze vennootschap ontvangen.

Zijn al de coupons ingewisseld, dan kan men door afgifte van een **talon**, die aan het couponblad bevestigd is, weer een nieuw couponblad verkrijgen.

Wanneer nu bovengenoemde naamlooze vennootschap de 40000 gld. rente geheel uitbetaalt in coupons, dan spreekt men van een **gewone leening**.

Betaalt zij de 40000 gld. niet uit in coupons, maar besteedt zij die som tot vorming van prijzen, b.v. 1 van 20000, 1 van 10000 en 10 van 1000 gld., dan spreekt men van een **loterijleening**. Bij loting wordt dan beslist op welke nummers de prijzen vallen. Tegenover de weinige gelukkigen, die een prijs krijgen, zijn er dan velen, die geen rente krijgen.

Betaalt zij van de rente een gedeelte, b.v. de helft, in coupons, en besteedt zij de andere helft tot vorming van prijzen, dan spreekt men van een **premieleening**.

De meeste obligatieleeningen zijn **aflosbaar**. Op de algemeene vergadering wordt dan door loting bepaald, welke nummers aflosbaar gesteld zullen worden. De houders van deze nummers moeten hun obligatie dan, meestal tegen ontvangst van de nominale waarde, teruggeven.

De obligaties zijn evenals de aandeelen aan koersverandering onderhevig. In Nederland wordt de koers, evenals bij aandeelen, uitgedrukt in percenten van de nominale waarde.

Oppervlakkig zou men meenen, dat 5 % obligaties op den koers 125 % zouden staan in een tijd dat de rentestand 4 % is.

Immers, zoo redeneert men, een som van 125 gld. à 4% uitgezet geeft 5 gld. rente. Een 5 % obligatie van 100 gld. nominaal geeft ook 5 gld. rente. Dus is die obligatie 125 gld. waard.

De 5 % obligaties staan echter slechts even boven pari. De oorzaak is gelegen in de kans van uitloting. Immers, als men gevaar loopt een 5 % obligatie van 100 gld. tegen de nominale waarde te moeten afgeven, zal men er geen 125 gld. voor over hebben.

Ook geldt hierbij de overweging, dat een maatschappij, die slechts geld kan leenen tegen betaling van 5 % rente, minder solide is dan een maatschappij, die geld kan leenen tegen een lager percent rente.

Digitized by Google

Onderstellen wij, dat A een 4 % obligatie van 1000 gld. nominaal, waarvan de coupons 1 Maart en 1 September vervallen, op 25 Mei wil verkoopen. Hij heeft dan op 1 Maart een coupon geknipt, d. w. z. een half jaar rente genoten. Sedert dien tijd, d. i. van 1 Maart tot 25 Mei (d. i. 2 maanden en 24 dagen = 2 × 30 + 24 of 84 dagen) heeft hij geen rente genoten. De kooper daarentegen behoeft slechts van 25 Mei tot 1 September (d. i. 3 maanden en 6 dagen = 3 × × 30 + 6 of 96 dagen) te wachten en geniet dan een half jaar rente. De kooper moet den verkooper de 84 dagen rente, die er verloopen is tusschen den laatsten vervaldag der coupon en den dag van verkoop dus vergoeden.

De koop en verkoop van obligaties geschiedt door bemiddeling van commissionairs, die hun lastgevers voor hun bemoeiingen in den regel $\frac{1}{8}$ % courtage van de nominale waarde in rekening brengen.

Ook hier geldt weer, wat bij aandeelen is opgemerkt, dat deze courtage het inkoopsbedrag verhoogt en het verkoopsbedrag vermindert.

Uit het voorgaande volgt ten aanzien van de berekening van de waarde eener obligatie:

Inkoopsprijs = Koers + Rente + Courtage.

Verkoopsprijs = Koers + Rente — Courtage.

Is de nominale waarde van een obligatie in buitenlandsche munt uitgedrukt, dan wordt deze met behulp van de op bladz. 83 vermelde herleidingsgetallen tot Hollandsch geld herleid.

Obligaties worden niet alleen uitgegeven door naamlooze vennootschappen, maar ook door staten, steden, vereenigingen.

Aandeelen en obligaties samen dragen den naam van **effecten**.

De koersen van sommige binnenlandsche en buitenlandsche effecten worden dagelijks bekend gemaakt in **koerslijsten**, uitgegeven door de **Vereeniging van den effectenhandel** te Amsterdam. De effecten (fondsen), die daarop voorkomen, noemt men **courante fondsen**; de andere heeten **incourante fondsen**.

Een eigenaardig soort van effecten vormen de **Inschrijvingen op het Grootboek der Nationale Schuld**. Het grootste gedeelte der Nederlandsche staatsschuld bestaat nl. uit leeningen, waarvoor zij $2\frac{1}{2}$ of 3 % rente geeft. Wie aan den Staat geld wil leenen, laat zijn naam inschrijven op het **kantoor van de Grootboeken** te Amsterdam. Hij ontvangt dan een bewijs van inschrijving, waarop zijn naam en het bedrag vermeld staan. De rente wordt aan dat

Digitized by Google

kantoor uitbetaald. Wordt zulk een inschrijving verkocht, dan moet een verandering van naam in de grootboeken plaats hebben; ook bij overlijden is dit het geval.

De kosten en moeiten, die daarmede gepaard gaan, zijn niet bevorderlijk voor den handel in zulke inschrijvingen. Daarom heeft de Staat aan eenige bankiershuizen, **administratiekantoren** genaamd, die groote inschrijvingen bezitten, het recht gegeven, daarvoor **certificaten aan toonder** uit te geven. Deze certificaten zijn van couponbladen voorzien en geven halfjaarlijksche rente. De coupons der $2\frac{1}{2}$ % leening vervallen 1 Januari en 1 Juli ($^1/_1$ en $^1/_7$), die der 3 % leening 1 Maart en 1 September ($^1/_3$ en $^1/_9$). De administratiekantoren rekenen 1 % rente der coupons voor hun moeite. Een halfjaarlijksche coupon van een 3% certificaat van 1000 gld. nominaal wordt dus betaald met 15 gld. — 1% van 15 gld. = 14,85 gld.

Voorbeelden.

1. *Iemand koopt op* 5 *Februari* 5 *obligatiën Russische binnenlandsche leening* 1894 van 4%, *elk van* 1000 *Z. R. nominaal. Koers* $64\frac{1}{4}$ %. *Vervaldagen der coupons* $^{14}/_3$, $^{14}/_6$, $^{14}/_9$, $^{14}/_{12}$; *courtage* $\frac{1}{8}$ %. *Wat moet hij betalen?*

Oplossing.

Nominale waarde Z.R. 5000 = 10000 gld.

Koers $64\frac{1}{4}$ % = 6425,— gld.

bij rente 14 Dec.—5 Febr. = 51 dg. = $\frac{51}{360} \times 400$ gld. = 56,67 gld.

6481,67 gld.

bij courtage $\frac{1}{8}$ % = 12,50 gld.

Inkoopsbedrag 6494,17 gld.

2. *Hoeveel ontvangt de verkooper van bovenstaande effecten?*

Oplossing.

Deze ontvangt de koerswaarde + de rente, moet echter de courtage betalen. Hij ontvangt dus 6425 gld. + 56,67 gld. — 12,50 gld. = = 6469,17 gld.

3. *Hoeveel rente maakt iemand van zijn geld, als hij* $4\frac{1}{2}$ %

Digitized by Google

obligaties der Nederlandsche Gist- en Spiritusfabriek koopt tegen den koers $101\frac{5}{8}$ %?

Oplossing.

Als hij 1000 gld. nominaal koopt, betaalt hij daarvoor (rente niet bij gerekend) $101\frac{5}{8}$ % + $\frac{1}{8}$ % of $101\frac{3}{4}$ % = 1017,50 gld. De rente, die hij jaarlijks geniet, bedraagt $4\frac{1}{2} \times 10 = 45$ gld. Hij moet dus 1017,50 gld. uitgeven om 45 gld. rente te krijgen. Met elke 100 gld. wint hij dus $\frac{45}{10{,}175}$ gld. = 4,42 gld. ruim. Hij maakt dus ruim 4,42 % rente.

Opgaven.

Bereken het inkoopsbedrag op 21 *Maart* (*courtage* $\frac{1}{8}$ %) *van:*

1. 2000 gld. certificaten N. W. S. $2\frac{1}{2}$ %; koers $81\frac{1}{8}$ %; coupons $^1/_1$, $^1/_7$.
2. 8000 gld. certificaten N. W. S. 3 %; koers $96\frac{1}{4}$ %; coupons $^1/_3$, $^1/_9$.
3. RM 3000 obligaties Duitsche Rijksleening 3 %; koers $89\frac{3}{4}$ %; coupons $^1/_1$, $^1/_7$.
4. fl$^0/_w$ 2000 5 % Oostenr. obligaties in papier 1868; koers $84\frac{3}{4}$ %; coupons $^1/_5$, $^1/_{11}$.

Bereken het verkoopsbedrag op 26 *September* (*courtage* $\frac{1}{8}$ %) *van:*

5. R. (papier) 2400 4% obligatiën Russische leening; koers $93\frac{5}{8}$ %; coupons $^{14}/_3$, $^{14}/_6$, $^{14}/_9$, $^{14}/_{12}$.
6. £ 600 4 % obligatiën Egyptische obligatieleening 1876; koers $104\frac{3}{8}$ %; coupons $^1/_5$, $^1/_{11}$.
7. G. R. 2500 $4\frac{1}{2}$ % obligatiën Groote Russische Spoorwegmaatschappij; koers $95\frac{3}{4}$ %; coupons $^{14}/_4$, $^{14}/_{10}$.

Hoeveel % *rente* (*tot in honderdste deelen nauwkeurig*) *geniet men van zijn geld, indien men koopt* (*courtage* $\frac{1}{8}$ %):

8. Certificaten N. W. 3 % S. tegen den koers $96\frac{1}{8}$ %?
9. $4\frac{1}{2}$ % obligatiën Haagsche Tramwegmaatschappij tegen den koers $103\frac{1}{4}$ %?
10. $3\frac{1}{2}$ % Nederl. Tramwegmaatschappij tegen den koers $92\frac{1}{8}$ %?
11. Iemand koopt op 5 Januari *f* 5000 nominaal N. W. S. 3 % tegen den koers $93\frac{3}{8}$ % en verkoopt ze 10 Mei tegen den koers $94\frac{1}{4}$ %. Hoeveel wint hij? (Denk er aan, dat op 1 Maart coupons

Digitized by Google

geknipt zijn; administratieloon). De courtage bedraagt in beide gevallen $\frac{1}{8}$ %.

12. In Oostenrijk is op eenige staatsfondsen couponbelasting. Zoo is op de 5 % Oostenr. leening 1869 in fl°/$_w$ zilver en papier 16% couponbelasting. Hoe groot is de werkelijke waarde van de halfjaarlijksche coupon van een obligatie van 1000 fl°/$_w$?
13. Iemand kocht op 10 Maart fl°/$_w$ 5000 nominaal Oostenr. obl. in zilver 5 % tegen den koers 83$\frac{1}{8}$ % en verkocht ze op 13 Augustus tegen den koers 84$\frac{1}{2}$ %. Hoeveel won hij? Couponkoers 21,06 gld. per 21 fl°/$_w$ effectief. De courtage bedroeg in beide gevallen $\frac{1}{16}$ %. De coupons vervallen $^1/_5$, $^1/_{11}$; courtage $\frac{1}{8}$ %.

Hoeveel % rente (tot in honderdste deelen nauwkeurig) geniet men van zijn geld, indien men koopt (courtage $\frac{1}{8}$ %):

14. Obligaties Duitsche Rijksleening 3$\frac{1}{2}$ %; koers 93$\frac{1}{2}$ %; couponkoers *f* 59,— per 100 Mk.?
15. Obligaties Russische Spoorwegen in Z. R. 4 %; koers 61$\frac{3}{8}$ %; couponkoers 1,22 gld. per Z. R.?
16. Obligaties 5 % Oostenr. leening 1868 in fl°/$_w$; koers 83$\frac{1}{2}$ %; couponbelasting 16 %; couponkoers 21,06 gld. per 21 fl°/$_w$?
17. Obligaties Russische Staatsfondsen 4$\frac{1}{2}$ % in Z. R.; koers 62$\frac{1}{2}$ %; couponbelasting 5 %; couponkoers 1,24 gld per Z. R.?

Digitized by Google

VIERKANTSWORTELTREKKING.

189. Bepaling. *Onder den* **vierkantswortel** *uit een getal verstaat men een ander getal, dat tot de tweede macht gebracht, het eerste oplevert.*

Omdat $5^2 = 25$ is, daarom is 5 de vierkantswortel uit 25. Men schrijft dit aldus:

$$\sqrt{25} = 5.$$

Evenzoo verklaart men:

$$\sqrt{64} = 8; \quad \sqrt{900} = 30; \quad \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}.$$

In plaats van vierkantswortel zegt men ook wel tweedemachtswortel.

A. Vierkantswortel uit geheele getallen.

190. Uit het aantal cijfers, waaruit een geheel getal bestaat, kan men gemakkelijk afleiden, uit hoeveel cijfers zijn vierkantswortel zal bestaan.

Wij zullen dit in het volgende verklaren.

Het vierkant van 1 is 1; van 10 is het 100; van 100 is het 10000; van 1000 is het 1000000 enz.

Tusschen 1 en 10 liggen alleen getallen van 1 cijfer, en hunne vierkanten liggen tusschen 1 en 100 en zijn dus getallen van 1 of 2 cijfers; dus bevat zijn vierkantswortel slechts 1 cijfer.

Tusschen 10 en 100 liggen alleen getallen van 2 cijfers, en hunne vierkanten liggen tusschen 100 en 10000 en zijn dus getallen van 3 of 4 cijfers. Omgekeerd: bevat een getal 3 of 4 cijfers, dan bevat zijn vierkantswortel 2 cijfers.

Tusschen 100 en 1000 liggen alleen getallen van 3 cijfers, en hunne vierkanten liggen tusschen 10000 en 1000000 en zijn dus getallen van 5 of 6 cijfers. Omgekeerd: bevat een getal 5 of 6 cijfers, dan bevat zijn vierkantswortel 3 cijfers, enz.

Digitized by Google

Het volgende geeft een duidelijke voorstelling van deze beschouwing:

Getallen.		Vierkanten.	
1 10	get. van 1 cijfer. . .	1 100	get. van 1 of 2 cijfers.
100 1000	get. van 2 cijfers . .	10000 1000000	get. van 3 of 4 cijfers.
10000 100000	get. van 4 cijfers . .	100000000 enz.	get. van 5 of 6 cijfers.

Om derhalve het aantal cijfers in den vierkantswortel van een getal te bepalen, behoeft men dit laatste slechts te verdeelen in vakjes van twee cijfers, te beginnen bij de eenheden.

Voorbeeld. $\sqrt{7\,85\,93\,64\,72}$ = een getal van 5 cijfers.

191. Bij de vierkantsworteltrekking uit geheele getallen onderscheiden wij drie gevallen:

I^e Geval. Vierkantswortel uit een getal van **een** of **twee** cijfers.
IIe Geval. Vierkantswortel uit een getal van **drie** of **vier** cijfers.
IIIe Geval. Vierkantswortel uit een getal van meer dan **vier** cijfers.

Eerste Geval.

192. Om den vierkantswortel uit getallen van 1 of 2 cijfers te bepalen, behoeft men slechts de vierkanten der getallen van 1 tot 10 te kennen:

$1^2 = 1$ $\quad 2^2 = 4$ $\quad 3^2 = 9$ $\quad 4^2 = 16$ $\quad 5^2 = 25.$
$6^2 = 36$ $\quad 7^2 = 49$ $\quad 8^2 = 64$ $\quad 9^2 = 81.$

Men vindt nu onmiddellijk:

$$\sqrt{36} = 6\,; \quad \sqrt{64} = 8\,; \quad \sqrt{81} = 9.$$

Iets anders is het, wanneer men den vierkantswortel uit een ander getal dan bovenstaande vierkanten wenscht te bepalen.

Zij gevraagd $\sqrt{57}$ te bepalen.

Men merke op, dat 57 gelegen is tusschen 49 of 7^2 en 64 of 8^2; derhalve ligt $\sqrt{57}$ tusschen 7 en 8; m. a. w. $\sqrt{57}$ is grooter dan 7 en kleiner dan 8. Men kan dus schrijven:

$$\sqrt{57} = 7, \text{ maar te klein;}$$
$$\sqrt{57} = 8, \text{ maar te groot.}$$

7 en 8 zijn de grenzen, waartusschen de werkelijke waarde van $\sqrt{57}$ ligt. Wij zullen voorloopig alleen de laagste grens aangeven, en dus schrijven:

$$\sqrt{57} = 7.$$

Opgave. Bepaal: $\sqrt{15}$; $\sqrt{42}$; $\sqrt{85}$; $\sqrt{94}$; $\sqrt{23}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{62}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{78}$; $\sqrt{39}$.

Digitized by Google

Tweede Geval.

193. Zij gevraagd den vierkantswortel te bepalen uit 1296.

Wij zien aan de verdeeling van het getal

$$12\,|\,96$$

in vakjes van twee cijfers, dat er in den vierkantswortel twee cijfers zullen voorkomen, zoodat de vierkantswortel bestaat uit tientallen en eenheden, en wij hem kunnen voorstellen door $T + E$.

$$\sqrt{1296} = T + E.$$

Is nu $\sqrt{1296} = T + E$, dan moet

$$1296 = T^2 + 2\ TE + E^2 \text{ zijn.}$$

Daar tientallen tot de tweedemacht gebracht honderdtallen opleveren, zullen wij de tientallen uit den wortel moeten zoeken bij de honderdtallen van het getal, dus bij 12 honderdtallen.

Nu liggen 12 honderdtallen tusschen 9 honderdtallen $= (3T.)^2$ en 16 honderdtallen $= (4\ T.)^2$ zoodat de vierkantswortel tusschen 30 en 40 ligt, en dus stellig 3 tot cijfer der tientallen bevat.

Men vindt dus het cijfer der tientallen door den vierkantswortel te trekken uit de honderdtallen van het getal.

Schrijven wij nu:

$$\sqrt{1296} = T + E$$

dus

$$1296 = T^2 + 2\ TE + E^2,$$

en nemen wij het vierkant der gevonden tientallen van het getal af, dan verkrijgen wij:

$$\begin{array}{r} 1296 = T^2 + 2\ TE + E^2 \\ 900 = T^2 \\ \hline 396 = 2\ TE + E^2, \end{array}$$

$$\text{of} \quad 396 = E\,(2\ T + E),$$

en dus:

$$E = \frac{396}{2\ T + E}.$$

Om dus de eenheden uit den wortel te vinden, moeten wij de rest deelen door $2\ T + E$. Van dezen deeler is echter slechts $2\ T$ bekend, kiezen wij nu alleen $2\ T$ tot deeler, dan wordt de rest gedeeld door een getal, dat **waarschijnlijk te klein is** (wanneer niet?) zoodat de uitkomst **waarschijnlijk** te groot is, waaruit volgt, dat de eenheden nooit het quotient:

$$\frac{396}{2\ T} = \frac{396}{2 \,.\, 3 \text{ tientallen}}$$

Digitized by Google

overtreffen kunnen. En daar men tientallen alleen op tientallen deelen kan zal het cijfer der eenheden nooit grooter kunnen zijn dan:

$$\frac{39}{2 \times 3}.$$

In ons voorbeeld zal het cijfer der eenheden dus nooit meer kunnen zijn dan: $\frac{39}{6} = 6$ (de breuk $\frac{1}{2}$ wordt natuurlijk verwaarloosd, waarom?).

Om te onderzoeken of het cijfer der eenheden 6 kan zijn, moeten wij slechts nagaan, of

$$E\,(2\,T + E)$$

396 oplevert, wanneer men $E = 6$ en $T = 30$ stelt.

$$6 \times (60 + 6) = 6 \times 66 = 396.$$

Daar dit werkelijk zoo is, is het cijfer der eenheden ook 6 en de gevraagde wortel 36.

Men schrijft de bewerking zeer eenvoudig op de volgende wijze:

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad T + E \\ & \sqrt{12|96} = 3 \quad\; 6 \\ T^2 = & \underline{\;\;9\;\;} \\ & \;\;396 \\ E(2\,T + E) = 6 \times 66 = & \underline{\;\;396} \\ & \;\;\;\;0 \end{array} \qquad \frac{39}{6} = 6$$

Andere voorbeelden:

a.

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad T + E \\ & \sqrt{20|25} = 4 \quad\; 5 \\ T^2 = & \underline{\;16\;} \\ & \;\;425 \\ E(2\,T + E) = 5 \times 85 = & \underline{\;\;425} \\ & \;\;\;\;0 \end{array} \qquad \frac{42}{8} = 5$$

b.

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad T + E \\ & \sqrt{24|01} = 4 \quad\; 9 \\ T^2 = & \underline{\;16\;} \\ & \;\;801 \\ E(2\,T + E) = 9 \times 89 = & \underline{\;\;801} \\ & \;\;\;\;0 \end{array} \qquad \frac{80}{8} = 10$$

(het cijfer der eenh. kan echter nooit grooter zijn dan 9.)

c.

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad T + E \\ & \sqrt{58|47} = 7 \quad\; 6 \\ T^2 = & \underline{\;49\;} \\ & \;\;947 \\ E(2\,T + E) = 6 \times 146 = & \underline{\;\;876} \\ & \;\;\;\;71 \end{array} \qquad \frac{94}{14} = 6$$

Digitized by Google

In dit laatste voorbeeld bleef er nog een rest 71. Men zegt nu: het getal 5847 is geen volkomen vierkant; 76 is de vierkantswortel uit het grootste vierkant, dat in 5847 begrepen is.

Opgaven.

1. Trek den vierkantswortel uit:

a.	1849;	2304;	3969;	3364;	5476.
b.	6241;	8836;	9604;	529;	961.
c.	676;	289;	1369;	1936;	3249.
d.	987;	5846;	3279;	9842;	7369.

2. Van drie getallen is het eerste deelbaar door 2, het tweede door 3 en het derde door 5; waardoor zijn hunne vierkanten dan deelbaar?
3. Als een getal deelbaar is door 2, maar niet door 4, kan dat getal dan een volkomen vierkant zijn?
4. Zijn de volgende getallen volkomen vierkanten, ja of neen:
   7835253; 4836245; 94837230?
5. De oppervlakte van een terrein bedraagt 2058 A. Als de lengte tot de breedte staat als 7 : 6, bereken dan de afmetingen.
6. Twee partijen linnen verhouden zich als 2 : 3 en zijn gekocht voor zooveel centen den meter als de eerste partij groot is. Wanneer men nu weet, dat voor de tweede partij 5408 ct. meer betaald is dan voor de eerste, hoe groot is dan elke partij?

Derde Geval.

194. Zij gevraagd den vierkantswortel uit 128164 te trekken.

$$\sqrt{12\,81\,64} = \bullet\ \bullet\ \bullet$$

Aan de verdeeling van het getal in vakjes van twee cijfers merken wij op, dat de wortel zal bestaan uit drie cijfers, en dus verdeeld kan worden in tientallen en eenheden.

$$\sqrt{12\,81\,64} = \overbrace{\bullet\ \bullet}^{T}\ \ \bullet^{+E}$$

De tientallen uit den wortel moeten wij zoeken bij de honderdtallen van het getal, d. i. bij 1281, en daartoe hebben wij slechts den wortel uit die honderdtallen te trekken.

$$\sqrt{12\,81} = \overset{T_1}{3}\ \overset{+E_1}{5} \qquad \text{(Eerste Geval).}$$

$$T_1^2 = \begin{array}{r} 9 \\ \hline 381 \end{array} \qquad \frac{38}{6} = 6 \text{ dit is te groot.}$$

$$E_1(2T_1 + E_1) = 5 \times 65 = \begin{array}{r} 325 \\ \hline 56 \end{array}$$

Digitized by Google

De wortel uit 128164 bevat dus 35 tientallen. Neemt men het vierkant van die 35 tientallen van het getal af, dan blijven er over 56 honderdtallen en nog 64 eenheden, dus 5664.

Deze rest 5664 is nu gelijk aan $E_2(2T_2 + E_2)$ en wij vinden, evenals in het eerste geval, een grens voor de eenheden door **de tientallen uit de rest te deelen door 2 × het aantal tientallen van den wortel:**

$$\frac{566}{70} = 8.$$

Het cijfer der eenheden kan dus 8 zijn; en daar

$$E_2(2T_2 + E_2) = 8 \times 708 = 5664 \text{ is,}$$

is het werkelijk 8 en is de gevraagde wortel 358.

Schrijfwijze:

$\sqrt{12\,81\,64} = 358$

$T^2 =$ 9

381

$E_1(2T_1 + E_1) = 5 \times 65 =$ 325

5664

$E_2(2T_2 + E_2) = 8 \times 708 =$ 5664

0

Andere voorbeelden.

1.

$\sqrt{14\,21\,29} = 377$

$T^2 =$ 9

521

$E_1(2T_1 + E_1) = 7 \times 67 =$ 469

5229

$E_2(2T_2 + E_2) = 7 \times 747 =$ 5229

0

2.

$\sqrt{1\,91\,10\,29\,76} = 13824$

$T^2 =$ 1

91

$E_1(2T_1 + E_1) = 3 \times 23 =$ 69

2210

$E_2(2T_2 + E_2) = 8 \times 268 =$ 2144

6629

$E_3(2T_3 + E_3) = 2 \times 2762 =$ 5524

110576

$E_4(2T_4 + E_4) = 4 \times 27644 =$ 110576

0

Digitized by Google

3. $\sqrt{28\,18\,54\,81} = 5309$

$T^2 = 25$

318

$E_1(2T_1 + E_1) = 3 \times 103 = 309$

95481

$E_3(2T_3 + E_3) = 9 \times 10609 = 95481$

0

Om het derde cijfer uit den wortel te bepalen moesten wij 106 deelen op 9; dit gaat nul maal. Daarom haalden wij het volgend vakje van twee cijfers bij. De tientallen werden nu 530, en daarom moesten wij achter 106 nog één nul plaatsen.

Opgaven.

Trek den vierkantswortel uit:

a. 609961; 970225; 151321; 16777216.
b. 244036; 487204; 998001; 5764801.
c. 4750104241; 151334226289.
d. 191707312997281; 899194740203776.
e. 238111286661761; 406067677556641.

B. Vierkantswortel uit gebroken getallen.

195. De wortel uit een breuk is gelijk aan den wortel uit den teller, gedeeld door den wortel uit den noemer.

$$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}, \text{ omdat } \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64} \text{ is.}$$

$$\sqrt{5\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}, \text{ omdat } \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} \text{ is.}$$

$$\sqrt{\frac{7}{11}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}, \text{ omdat } \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{7})^2}{(\sqrt{11})^2} = \frac{7}{11} \text{ is.}$$

Algemeen $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, omdat $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$ is.

Kan men den wortel uit den noemer niet trekken, dan kan men de breuk eerst herleiden tot een andere, uit wier noemer men den wortel wel trekken kan.

Voorbeeld. $\sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{\sqrt{80}}{25\sqrt{}} = \frac{8 \text{ of } 9}{5} = \frac{8}{5} \text{ of } \frac{9}{5}$.

Digitized by Google

dus $\sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{8}{5}$, maar te klein;

$\sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{9}{5}$, maar te groot.

Opgave. Herleid den vierkantswortel uit: $6\frac{1}{4}$; $7\frac{1}{9}$; $4\frac{21}{25}$; $\frac{625}{1296}$; $\frac{19}{5}$; $4\frac{2}{3}$; $7\frac{1}{8}$; $15\frac{2}{3}$; $9\frac{3}{7}$.

C. Vierkantswortel uit tiendeelige breuken.

196. Zij gevraagd $\sqrt{12,96}$ te herleiden. Voor 12,96 kan men schrijven $\frac{1296}{100}$; dus is:

$$\sqrt{12,96} = \frac{\sqrt{12\,96}}{\sqrt{100}} = \frac{36}{10} = 3,6.$$

Bij de herleiding van $\sqrt{1296}$ komt een verdeelstreep te staan op de plaats van het decimaalteeken.

Zij ook gevraagd te bepalen:

$$\sqrt{151334,226289}$$

Hiervoor kan men schrijven:

$$\sqrt{\frac{151334226289}{100000}} = \frac{\sqrt{15\,13\,34\,22\,62\,89}}{\sqrt{1000000}} = \frac{389017}{1000} = 389,017.$$

Bij de worteltrekking uit den teller komt een verdeelstreep ook weer te staan op de plaats van het decimaalteeken.

Kiezen we nu $\sqrt{738,257}$; deze is gelijk aan $\sqrt{\frac{738257}{1000}}$. Daar we uit den noemer den wortel niet kunnen trekken, vermenigvuldigen we teller en noemer eerst met 10; wij krijgen dan:

$$\frac{\sqrt{7\,38\,25\,70}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{7\,38\,25\,70}}{100} = \frac{2717}{100}$$ maar te klein.

Dus $\sqrt{738,257} = 27,17$ maar te klein.

Ook bij deze bewerking kwam een verdeelstreep op de plaats van het decimaalteeken te staan. Wij kunnen de vorige bewerkingen nu ook aldus verrichten:

De eerste verdeelstreep plaatsen wij bij het decimaalteeken, verdeelen vervolgens rechts en links van het decimaalteeken het getal in vakjes van twee cijfers. Indien er rechts van de eerste deelstreep

Digitized by Google

geen even aantal cijfers staan, voegen wij er een nul achter. Vervolgens trekken wij den wortel uit het getal alsof het geheel was, en plaatsen in de uitkomst een decimaalteeken, zoodra wij bij de bewerking het decimaalteeken uit het getal passeeren.

Voorbeelden.

1.
$$\sqrt{12,96} = 3,6$$
$$9$$
$$396$$
$$6 \times 66 = 396$$
$$0$$

2.
$$\sqrt{15\,13\,34,22\,62\,89} = 389,017$$
$$9$$
$$613$$
$$68 \times 8 = 544$$
$$6934$$
$$769 \times 9 = 6921$$
$$132262$$
$$77801 \times 1 = 77801$$
$$5446189$$
$$778027 \times 7 = 5446189$$
$$0$$

3.
$$\sqrt{7\,38,25\,7} = 27,17 \text{ maar te klein.}$$
$$4$$
$$338$$
$$7 \times 47 = 329$$
$$925$$
$$1 \times 541 = 541$$
$$38470$$
$$7 \times 5427 = 37989$$
$$481$$

Opgaven.

1. Trek den vierkantswortel uit de volgende getallen:
   26,6256; 8779,69; 0,633616; 0,00344569;
   79849,25229121; 6,2523502209.

---

197. Ieder geheel getal kan men beschouwen als een **decimaal** getal met zooveel nullen achter het decimaalteeken als men **verkiest.**

Digitized by Google

Zoo is $7 = 7{,}000000\ldots$, dus is ook

$\sqrt{7} = \sqrt{7{,}000000}\ldots$

hoe meer nullen men achter de 7 zet, hoe meer cijfers achter het decimaalteeken in den wortel voorkomen.

Nu komt bij de bewerking de eerste deelstreep achter de 7 te staan, terwijl rechts van die deelstreep vakken van twee nullen voorkomen, aldus:

$$\sqrt{7,00\,00\,00} = \bullet,\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

Men kan nu ook de nullen weglaten, en alleen in de bewerking telkens een vakje van twee nullen bijvoegen, aldus:

$\sqrt{7} = 2{,}645$

		4
		300
$6 \times$	$46 =$	276
		2400
$4 \times$	$524 =$	2096
		30400
$5 \times$	$5285 =$	26425
		3975

Opgaven.

Bereken tot in vijf decimalen nauwkeurig:

$\sqrt{14}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{3{,}75}$; $\sqrt{2{,}58}$; $\sqrt{0{,}3}$;

$\sqrt{7{,}568}$; $\sqrt{9{,}37}$; $\sqrt{2{,}453}$.

---

198. We vonden zooeven:

$\sqrt{7} = 2{,}645$ maar te klein;

$\sqrt{7} = 2{,}646$ maar te groot,

derhalve ligt de juiste waarde van $\sqrt{7}$ tusschen 2,645 en 2,646 of tusschen $2645 \times \frac{1}{1000}$ en $2646 \times \frac{1}{1000}$; d. i. tusschen twee op elkaar volgende veelvouden van $\frac{1}{1000}$.

Bepaling. *Men zegt, dat de wortel uit een getal tot op* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ enz. $\frac{1}{n}$ *nauwkeurig bepaald is, als men twee op elkaar volgende veelvouden van* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ *enz.* $\frac{1}{n}$ *kan aanwijzen, waartusschen de juiste waarde van den wortel ligt.*

Digitized by Google

Voorbeelden.

1. Zij gevraagd $\sqrt{14}$ tot op $\frac{1}{3}$ nauwkeurig te bepalen.

Wij schrijven 14 onder den noemer 3^2.

$$\sqrt{14} = \sqrt{\frac{14 \cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{126}{9}} = \frac{\sqrt{126}}{3} = \frac{11 \text{ of } 12}{3};$$

dus: $\sqrt{14} = \frac{11}{3}$ of $\frac{12}{3}$; of wel $\sqrt{14} = 3\frac{2}{3}$ of 4.

$\frac{11}{3}$ en $\frac{12}{3}$ zijn twee op elkaar volgende veelvouden van $\frac{1}{3}$.

2. Gevraagd $\sqrt{391}$ tot op $\frac{2}{5}$ nauwkeurig te bepalen.

Omdat $\frac{2}{5} = \frac{1}{2\frac{1}{2}}$ is, bepalen we $\sqrt{391}$ nauwkeurig tot op $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ en schrijven daartoe 391 onder den noemer $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$.

Aldus:

$$\sqrt{391} = \sqrt{\frac{391 \times (2\frac{1}{2})^2}{(2\frac{1}{2})^2}} = \sqrt{\frac{2443\frac{3}{4}}{(2\frac{1}{2})^2}} = \frac{\sqrt{2443\frac{3}{4}}}{2\frac{1}{2}} = \frac{49 \text{ of } 50}{2\frac{1}{2}}.$$

Dus: $\sqrt{391} = \frac{49}{2\frac{1}{2}} = 49 \times \frac{2}{5}$, maar te klein;

$$\sqrt{391} = \frac{50}{2\frac{1}{2}} = 50 \times \frac{2}{5} \text{ maar te groot.}$$

Opgaven.

Bepaal:

1. $\sqrt{738}$ nauwkeurig tot op $\frac{1}{5}$.
2. $\sqrt{3947}$ „ „ op $\frac{2}{3}$.
3. $\sqrt{59379}$ „ „ op $1\frac{1}{4}$.
4. $\sqrt{37859427}$ „ „ op 4 eenheden.
5. $\sqrt{39857263}$ „ „ op $2\frac{1}{2}$ eenheid.

Digitized by Google

DERDEMACHTSWORTELTREKKING.

199. Bepaling. *Onder den* **derdemachtswortel** *van een getal verstaat men een ander, dat tot de derdemacht gebracht, het eerste oplevert.*

Zoo is de derdemachtswortel van 8 gelijk aan 2, omdat $2^3 = 8$ is.

Men schrijft dit aldus: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Evenzoo is: $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[3]{1000} = 10$.

Hieronder volgen de termen der schaal van ons talstelsel alsmede hunne derdemachten:

Getallen.		Derdemachten.	
1 10	get. van 1 cijfer . .	1 1000	get. van 1, 2 of 3 cijfers.
100 1000	get. van 2 cijfers . .	1000000 100 0000000	get. van 4, 5 of 6 cijfers. get. van 7, 8 of 9 cijfers.

enz.

Tusschen 1 en 10 liggen alleen getallen van 1 cijfer; hunne derdemachten liggen tusschen 1 en 1000 en bevatten dus 1, 2 of 3 cijfers.

Tusschen 10 en 100 liggen de getallen van 2 cijfers; hunne derdemachten liggen tusschen 1000 en 1000000 en bevatten dus 4, 5 of 6 cijfers.

Tusschen 100 en 1000 liggen de getallen van 3 cijfers, hunne derdemachten liggen tusschen 1 000 000 en 1000 000 000 en bevatten dus 7, 8 of 9 cijfers; enz.

Omgekeerd: bevat een derdemacht 1, 2 of 3 cijfers, dan bevat de derdemachtswortel 1 cijfer;

bevat de derdemacht 4, 5 of 6 cijfers, dan bevat de derdemachtswortel uit het getal 2 cijfers;

Digitized by Google

bevat de derdemacht 7, 8 of 9 cijfers, dan bevat de derdemachtswortel 3 cijfers; enz.

Om dus het aantal cijfers uit den derdemachtswortel van een derdemacht te bepalen, verdeelen we dit laatste getal in vakjes van drie cijfers, te beginnen bij de eenheden. Zooveel vakjes als men verkrijgt, juist zooveel cijfers zijn er in den derdemachtswortel.

$\sqrt[3]{327\,381\,934\,393\,961}$ = een getal van vijf cijfers.

200. Bij de derdemachtsworteltrekking uit geheele getallen onderscheiden wij drie gevallen.

I^e Geval. Derdemachtswortel uit een getal van 1, 2 of 3 cijfers.

IIe Geval. Derdemachtswortel uit een getal van 4, 5 of 6 cijfers.

IIIe Geval. Derdemachtswortel uit een getal van een willekeurig aantal cijfers.

Eerste Geval.

201. Om den derdemachtswortel uit een getal van 1, 2 of 3 cijfers te kunnen trekken, is het raadzaam de derdemachten van de getallen van 1 cijfer te onthouden:

$1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$;
$4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$;
$7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$.

Wil men nu den derdemachtswortel berekenen uit een getal van 1, 2 of 3 cijfers, dat niet een derdemacht is, b.v. uit 598, dan redeneeren wij aldus:

598 ligt tusschen 512 en 729 of 8^3 en 9^3,

dus $\sqrt[3]{598}$ ligt tusschen 8 en 9.

Wij schrijven nu:

$\sqrt[3]{598} = 8$, maar te klein;

$\sqrt[3]{598} = 9$, maar te groot.

8 en 9 zijn dus de grenzen, waartusschen $\sqrt[3]{598}$ ligt; gewoonlijk neemt men de laagste grens en schrijft: $\sqrt[3]{598} = 8$.

Tweede Geval.

202. Zij gevraagd $\sqrt[3]{185193}$ te bepalen.

Aan de verdeeling van het getal in vakjes van drie cijfers:

$\sqrt[3]{185\,193}$

Digitized by Google

merken we op, dat de wortel uit twee cijfers bestaat, dus uit tientallen (T) en eenheden (E).

Stellen wij nu $\sqrt[3]{185\,193} = T + E$, dan moet

$$185\,193 = (T+E)^3 = T^3 + 3T^2E + 3TE^2 + E^3 \text{ zijn.}$$

Daar tientallen, tot de derdemacht gebracht, duizendtallen opleveren, moeten wij ook de tientallen van den wortel zoeken bij de duizendtallen van het getal, dat is bij 185.

Nu ligt 185 tusschen 125 en 216, d. i. tusschen 5^3 en 6^3; de wortel ligt dus tusschen 5 tientallen en 6 tientallen, d. i. tusschen 50 en 60 en heeft dus stellig 5 tot cijfer der tientallen.

Hieruit leeren wij:

Het cijfer der tientallen van den wortel wordt gevonden door den derdemachtswortel te trekken uit de duizendtallen van het getal.

Wij kunnen nu schrijven:

$$\sqrt[3]{185\,193} = \begin{matrix} T+E \\ 5 \quad \bullet \end{matrix}$$

Nemen wij nu van:

$$185193 = T^3 + 3T^2 \,.\, E + 3T \,.\, E^2 + E^3$$

af: $125\cdots = T^3$

dan is $60193 = 3T^2 \,.\, E + 3T \,.\, E^2 + E^3$

of $60193 = (3T^2 + 3T \,.\, E + E^2) \times E.$

Wij vinden dus de eenheden door de rest te deelen door $3T^2 + + 3T \,.\, E + E^2$.

$$E = \frac{60193}{3T^2 + 3T \,.\, E + E^2}$$

Van den deeler is echter alleen bekend $3T^2$, zijnde 3×25 honderdtallen $= 75$ honderdtallen.

Deelen we nu de rest 60193 alleen door $3T^2$, dan deelen we door een getal, dat **waarschijnlijk** te klein is, zoodat de uitkomst **waarschijnlijk** te groot is, m. a. w.:

De eenheden zijn gelijk aan de rest gedeeld door $3 \times$ het vierkant der tientallen, of die eenheden zijn kleiner:

$$E \leqslant \frac{60193}{3T^2} \text{ of } E \leqslant \frac{60193}{3 \times 25 \text{ honderdtallen}}\ ^{1}).$$

Daar echter honderdtallen alleen op honderdtallen gedeeld kunnen worden, heeft men ook:

$$E \leqslant \frac{601}{3 \,.\, 25}.$$

---

[1]) Het teeken $\leqslant$ beteekent „gelijk aan of kleiner dan."

Digitized by Google

d. i. $601 : 75 = 8.$

De eenheden zijn dus 8 of ze zijn minder; ze zullen 8 zijn, als:

$(3T^2 + 3TE + E^2) \times E = 60193$ is,

wanneer we voor T in de plaats schrijven 50, en voor E 8.

Wij schrijven dit aldus:

$3T^2 =$	. . . .	$75\cdot\cdot$
$3TE =$	$150 \times 8 =$	1200
$E^2 =$	$8 \times 8 =$	64
$3T^2 + 3TE + E^2 =$		8764
	$\times E$	$\times 8$
$(3T^2 + 3TE + E^2) \times E =$		$70112.$

Dit blijkt te veel te zijn, derhalve kunnen de eenheden op zijn hoogst 7 zijn. Onderzoeken wij of 7 werkelijk de eenheden zijn:

$3T^2 =$		$75\cdot\cdot$
$3TE =$	$150 \times 7 =$	1050
$E^2 =$	$7 \times 7 =$	49
$3T^2 + 3TE + E^2 =$		8599
	$\times E$	$\times 7$
$(3T^2 + 3TE + E^2) \times E =$		$60193.$

dan blijkt, dat de eenheden werkelijk 7 zijn.

Derhalve is $\sqrt[3]{185193} = 57.$

Wij schrijven de bewerking aldus:

$$\begin{array}{rl} 3T^2 = & 75\cdot\cdot \\ 3TE = 150 \times 7 = & 1050 \\ E^2 = 7 \times 7 = & 49 \\ \hline & 8599 \times 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \overset{T\ +\ E}{\sqrt[3]{185\,193} = 5\quad 7} \\ 5^3 = & 125 \\ \hline & 60\,193 \\ = & 60\,193 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Opgave.

Bepaal den derdemachtswortel uit: 2197; 19683; 97336; 195112; 438976; 74088; 571787; 658503; 804357; 941192; 275625; 328509.

Derde Geval.

203. Zij gevraagd $\sqrt[3]{4750104241}$ te bepalen. Verdeelen wij het getal in vakjes van drie cijfers:

$$\sqrt[3]{4\,750\,104\,241} = \overset{T\ +\ E}{\overbrace{\bullet\bullet\bullet\quad\bullet}}$$

Digitized by Google

dan merken wij op, dat de wortel uit 4 cijfers bestaat, en daarom verdeeld kan worden in tientallen (T) en eenheden (E). De tientallen (T) worden verkregen door den derdemachtswortel te trekken uit de duizendtallen van het getal:

$$\sqrt[3]{4\,750\,104} = \overbrace{\bullet\ \bullet}^{T_2}\ \overbrace{\bullet}^{E_2}$$

Doch deze wortel bestaat uit drie cijfers en kan daarom ook weer gesplitst worden in tientallen (T_1) en eenheden (E_1).

De tientallen T_1 worden verkregen uit:

$$\sqrt[3]{4\,750}$$

en dezen wortel hebben wij in geval II leeren vinden. Bepalen wij dien wortel:

$$\sqrt[3]{4\,750} = 16$$

$$\begin{array}{rrr} 3T_1^2 = & 3 & 1 \\ 3T_1E_1 = 30 \times 6 = & 180 & \\ E_1^2 = \ 6 \times 6 = & 36 & \\ & 516 \times 6 = & 3096 \\ & & 654 \end{array} \qquad 3750 \qquad \text{(A).}$$

Hiervoor vinden wij 16; dus weten wij nu ook dat $T_2 = 16$ tientallen of 160 is, met andere woorden:

$$\sqrt[3]{4\,750\,104} = \overbrace{16}^{T_2}\ \bullet^{E_2}.$$

rest 654104.

Om nu de eenheden E_2 te vinden, moeten wij de rest door $3T_2^2$ deelen.

Nu kunnen wij gemakkelijk $3T_2^2$ uit de reeds gebruikte getallen vinden.

Immers $T_2^2 = (T_1 + E_1)^2$ uit worteltrekking (A), en dus:

$$3T_2^2 = 3(T_1 + E_1)^2 = 3T_1^2 + 6T_1E_1 + 3E_1^2.$$

Nu is uit die worteltrekking gebleken:

$$\begin{array}{rr} 3T_1E_1 & = 180 \\ E_1^2 = & 36 \\ 3T_1^2 + 3T_1E_1 + \ E_1^2 = & 516 \\ \hline 3T_1^2 + 6T_1E_1 + 2E_1^2 = & 732 \end{array} \quad \text{samen}$$

Tellen we hierbij op E_1^2, dat is het middelste der drie getallen,

Digitized by Google

die in worteltrekking (A) door een accolade verbonden zijn, dan verkrijgen wij $3T_2^2 = 768$ honderdtallen.

Om nu verder van $\sqrt[3]{4\,750\,104} = \overbrace{16}^{T_2 + E_2}$ ●

654104

de eenheden te vinden, handelen wij als in geval II.

$$\sqrt[3]{4\,750\,104} = \overbrace{16}^{T_2 + E_2} \quad 8$$

$$\begin{array}{rl} 3T_2^2 = & 768 \\ 3T_2E_2 = 480 \times 8 = & 3840 \\ E_2^2 = 8 \times 8 = & 64 \\ \hline & 80704 \end{array} \Bigg| \times 8 \quad \begin{array}{r} 654104 \\ = 645632 \\ \hline 8472 \end{array} \qquad \text{(B).}$$

Wij weten nu:

$$\sqrt[3]{4\,750\,104\,241} = \overbrace{168}^{T_3 + E_3} \quad ●$$

rest: 8472241

Wij bepalen de eenheden weer door $3T_3^2$ te deelen op de rest, terwijl $3T_3^2$ uit de getallen, die in worteltrekking (B) door een accolade verbonden zijn, verkregen kan worden, door hun som nog met het middelste getal d. i. 64 te vermeerderen.

$$\begin{array}{rl} 3T_3^2 & = 84672\,.\,. \\ 3T_3 \,.\, E_3 = 5040 \times 1 & = 5040 \\ E_3^2 = 1 \times 1 & = 1 \\ & \hline & 8472241 \end{array}$$

De bewerking in haar geheel wordt nu aldus:

Digitized by Google

$\sqrt[3]{4\,750\,104\,231} = 1681$

1

$T_1 = 10$	$3T_1^2 =$	3··	3750
$E_1 = 6$	$3T_1E_1 = 30 \times 6 =$	180	
	$E_1^2 = 6 \times 6 =$	36	
		516	$\times 6 =$ 3096
		56	654104
$T_2 = 160$			
$E_2 = 8$	$3T_2^2 =$	768··	
	$3T_2E_2 = 480 \times 8 =$	3840	
	$E_2^2 = 8 \times 8 =$	64	
		80704	$\times 8 =$ 645632
		64	8472241
$T_3 = 1680$			
$E_3 = 1$	$3T_3^2 =$	84672··	
	$3T_3E_3 = 5040 \times 1 =$	5040	
	$E_3^2 = 1 \times 1 =$	1	
		8472241	$\times 1 =$ 8472241
			0

Andere voorbeelden.

$\sqrt[3]{327\,381\,934\,393\,961} = 68921$

216

60	$3T_1^2 =$	108··	111381
8	$3T_1E_1 = 180 \times 8 =$	1440	
	$E_1^2 = 8 \times 8 =$	64	
		12304	$\times 8 =$ 98432
		64	12949934
680	$3T_2^2 =$	13872··	
9	$3T_2 \times E_2 = 2040 \times 9 =$	18360	
	$E_2^2 = 9 \times 9 =$	81	
		1405641	$\times 9 =$ 12650769
		81	299165393
6890	$3T_3^2 =$	1424163··	
2	$3T_3 \times E_3 = 20670 \times 2 =$	41340	
	$E_3^2 = 2 \times 2 =$	4	
		142457644	$\times 2 =$ 284915288
		4	14250105961
68920	$3T_4^2 =$	142498992··	
1	$3T_4 \times E_4 = 206760 \times 1 =$	206760	
	$E_4^2 = 1 \times 1 =$	1	
		14250105961	$\times 1 =$ 14250105961
			0

Digitized by Google

2. $\sqrt[3]{12\,230\,590\,464} = 2$

				8	
				4230	
$T_1 = 20$	$3T_1^2 =$		12..		
$E_1 = 3$	$3T_1 . E_1 =$	$60 \times 3 =$	180		
	$E_1^2 =$	$3 \times 3 =$	9		
			1389	$\times 3 =$	4167
			9		63590464
$T_2 = 230$	$3T_2^2$		1587..		
$E_2 = 0$					
$T_3 = 230$	$3T_3^2 =$		158700..		
$E_3 = 4$	$3T_3 \times E_3 =$	$6900 \times 4 =$	27600		
	$E_3^2 =$	$4 \times 4 =$	16		
			15897616	$\times 4 =$	63590464
					0

Om het derde cijfer uit den wortel te bepalen, moesten wij 1587 deelen op 635; dit gaat nul maal. Daarom haalden wij het volgend vakje van drie cijfers bij. De tientallen werden nu 230; daarom moesten wij achter 1587 twee nullen en achter 690 nog één nul plaatsen.

Opgaven.

Bepaal den derdemachtswortel uit:
113379904; 887503681; 3518743761; 387420489; 19770609664; 3429644729; 56800235584; 68719476736; 128100283921; 351298031616; 735091890625; 832972004929; 427929800129788411; 285544154243029527.

Digitized by Google

Van verschillende Examens.

1. Vul in: $\frac{3\frac{5}{9} + 15,\not{7}\not{5} - \ldots \times 1\frac{3}{11}}{9,\not{2}\not{3}} \times \frac{5\frac{2}{7}}{3\frac{1}{3}} - 2\frac{6}{8\,5} = 1.$

(*Leerl.-Mach*).

2. Benader den vierkantswortel uit $7\frac{5}{8}$ tot op $\frac{3}{8}$ nauwkeurig. (*Idem*).

3. Bepaal x zonder hoofdeigenschap:
$$(x - 3) : (x - 1) = (28 - x) : (31 - x).$$ (*Idem*).

4. A is B 11240 gld. schuldig, te betalen deels over 4, deels over 8 maanden. Met $4\frac{1}{2}$ % 's jaars rabat boven 't honderd betaalt hij de geheele schuld contant met 11000 gld. Hoeveel moest hij over 4 maanden betalen? (*Idem*).

5. Bewijs door toepassing van de eigenschappen der evenredigheden, dat uit $a : b = c : d$ volgt:
$$ab : cd = (a + b)^2 : (c + d)^2.$$ (*Idem*).

6. Eene stoomboot stoomt in 30 dagen van A naar B heen en terug. Indien de boot op de heenreis 56 KM en op de terugreis 64 KM per dag vordert, vraagt men den afstand van beide plaatsen. (*Idem*).

7. Bewijs, dat het produkt $n^2(n^4 - 1)$ altijd deelbaar is door 60 voor elke geheele waarde van n. (*Idem*).

8. Hoeveel is de inhoud in HL van:
$$\frac{2{,}5\ \mathrm{DM^3} + 45\ \mathrm{DS} + 468\ \mathrm{dL} + 25\ \mathrm{dS} + 345\ \mathrm{mS} - 0{,}6 \times 88153\ \mathrm{dM^3}.}{8\frac{1}{5} \times 4{,}\not{0}243\not{9} - 1{,}\not{9}}\ ?$$

(*Adelborst*).

9. Twee kapitalen, die 4000 gld. verschillen, brengen, wanneer ze

Digitized by Google

à $5\frac{1}{4}$ % uitgezet worden, 1,125 maal zooveel rente op, als wanneer het eerste à 5 % en het andere à 4 % gedurende denzelfden tijd uitstond. Hoe groot is elk kapitaal? (*Idem*).

10. Van eene meetkundige evenredigheid is de som van de termen der eerste reden = 20, de som der middelste termen = 21 en de som der uiterste termen = 23. Welke is de evenredigheid? (*Idem*).

11. Uit A vertrekt een voetganger met eene snelheid van 5 KM per uur naar B, terwijl 1 uur 12 minuten later een wielrijder uit B naar A vertrekt met eene snelheid van $22\frac{1}{2}$ KM per uur. Op het oogenblik, dat zij elkaar voorbijgaan, heeft de wielrijder $3\frac{1}{2}$ maal grooteren afstand afgelegd dan de voetganger. Op welken afstand ligt A van B? (*Idem*).

12. In de uitdrukking 1 $a\,b\,603\,c$ stellen de letters a, b en c cijfers voor. Bepaal deze cijfers zoo, dat het getal deelbaar wordt door 1584. (*Idem*).

13. 's morgens te vijf uur vertrekt een rijtuig uit A naar B met eene snelheid van 200 Meter per minuut. Na aankomst te B houdt het 1 uur 20 minuten stil en keert vervolgens naar A terug, nu evenwel met eene snelheid van 250 Meter per minuut. Te 9 uur 10 minuten (dienzelfden morgen) komt het rijtuig een voetganger tegen, die vijftig minuten later dan het rijtuig uit A was vertrokken met eene snelheid van 80 meter per minuut. Hoe groot is de afstand van A naar B? (*Idem.*)

14. Bereken:

$$\left(\frac{57\frac{1}{4}\text{ DL}}{21000\text{ cL}} : \frac{0{,}066\text{ HG}}{20\frac{5}{8}\text{ dG}}\right) \times (1{,}51\tfrac{7}{75}\text{ HG} - 0{,}00\tfrac{6}{7}\text{ MG}) : (4{,}\tfrac{7}{14}\text{ DG} + 0{,}27\tfrac{5}{21}\text{ KG}).$$

(*Cadettenschool*).

15. Bij de winstverdeeling van een Bank werd eerst van de zuivere winst 5 % van het aandeelenkapitaal aan de aandeelhouders uitgekeerd. Van de rest bekwam de directie de helft, van de andere helft ontvingen de gezamenlijke aandeelhouders 35 %, de commissarissen 20 %, de directie 25 % en het personeel wat er toen nog overschoot.
Als nu de directie 1395 gld. meer ontving dan alle aandeel-

Digitized by Google

houders te zamen en 4252,50 gld. meer dan commissarissen, hoeveel bedroeg dan het aandeelenkapitaal? (*Idem*).

16. Een wijnkooper koopt voor 2700 gld. wijn en verkoopt die tegen 0,77 gld. de flesch van 7 DL. Als hij nu tweemaal zooveel guldens wint als hij HL verkoopt, vraagt men, voor hoeveel hij den wijn per HL heeft ingekocht? (*Idem*).

17. Twee plaatsen A en B zijn door eene rivier verbonden. Uit A vertrekt een boot, welke op het oogenblik van vertrek een signaal met de stoomfluit geeft, dat te B gehoord wordt. 7 minuten en $4\frac{8}{11}$ seconde, nadat het signaal gehoord wordt, komt de boot te B aan. Als de boot 20 KM per uur aflegt en de snelheid van het geluid 330 M per seconde is, hoever ligt A dan van B? (*Idem*).

18. Voor eene tooneelvoorstelling kost een plaats 1e rang 2 gld. 2e rang 1,50 gld., 3e rang 1 gld. en 4e rang 0,50 gld. De totale ontvangst bedraagt 7,50 gld., terwijl op den *derden* rang driemaal zooveel personen zitten als op den *vierden*; op den *tweeden* rang zitten twee en een half maal zooveel personen als op den *eersten*, en op den *eersten* zitten 50 personen meer dan op den *vierden*. Hoeveel personen zaten op elken rang? (*Idem*).

19. Een wielrijder vertrekt van A naar B en krijgt 2 uur na zijn vertrek een ongeluk, waardoor hij te voet zijn weg vervolgt met $\frac{3}{7}$ van zijne vroegere snelheid. Hij komt nu $1\frac{1}{2}$ uur te laat in B aan. Was het ongeluk voorgevallen, nadat hij 8 KM meer had afgelegd, dan zou hij $\frac{1}{2}$ uur te laat in B zijn aangekomen. Welke was zijne oorspronkelijke snelheid en hoe lang is de weg van A naar B? (*Idem*).

20. Een badkuip kan worden gevuld door de heetwaterpijp in 9 minuten, door de koudwaterpijp in $11\frac{1}{4}$ minuut. De beide kranen worden tegelijk opengezet, maar op het oogenblik, dat de kuip behoorde vol te zijn, blijkt dat de afvoerbuis al dien tijd heeft opengestaan. Deze wordt nu dichtgedraaid, en na $3\frac{3}{4}$ minuut is nu de kuip vol. In hoeveel tijd zou de afvoerpijp de kuip doen leegloopen, indien de toevoer afgesloten is?

21. Zoek het bedekte cijfer □ in de vergelijking:

$$\frac{12\frac{5}{6} : 1{,}5 - 2{,}3\,(4\frac{1}{7} - \square) + 3{,}9\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}} = 3$$

(*Post en Telegr.*).

Digitized by Google

22. Dezer dagen werd in ons land een steenkolenlaag ontdekt van 125 cM dik; indien deze laag zich uitstrekt over eene lengte van 2,5 KM en eene breedte van 120 Meter, wordt gevraagd, hoeveel treinen van 30 tientonswagens noodig zijn tot vervoer dezer kool. Een ton is 1000 KG; gewicht 80 KG per HL. (*Idem*).

23. A en B nemen aan een werk op te leveren in 30 dagen. A kan het alleen doen in 60 dagen en B alleen in 48 dagen. Nadat zij samen 10 dagen gewerkt hebben, staakt A den arbeid gedurende 5 en B gedurende 8 dagen. Hoe lang zullen zij zich door C, die het werk alleen in 40 dagen kan verrichten, moeten doen bijstaan, om op tijd gereed te zijn? (*Idem*).

24. Twee kapitalen, samen 20000 gulden groot, staan 15 maanden op interest; het eene tegen 4 %, het andere tegen $4\frac{1}{2}$ % 's jaars, en brengen in dien tijd 1037,50 gulden rente op. Welke zijn die kapitalen? (*Idem*).

25. B koopt 600 KG rijst tegen 10 cents per KG en krijgt 40 KG overwicht. Als hij die rijst tegen 10 cents per KG verkoopt met 2,5 % korting voor contante betaling, vraagt men naar zijn winst of verlies ten honderd. (*Idem*).

26. Herleid:

$$\left\{\left(\frac{4\frac{0,99}{3}}{2\frac{4,65}{18,6}}+\frac{2\frac{4\frac{5}{14}}{16\frac{6}{7}}}{4\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{0,41\frac{6}{7}}{3,3}:0,2\right)\right\}:\left(4\tfrac{1}{6}\times\frac{\frac{1}{3}}{25}\right).$$

(*Reservekader*).

27. Als gegeven is: $a:b=c:d$, wordt gevraagd te bewijzen:

$$\frac{a^2+b^2}{b}:(a^2-b^2)=(ac+bd):(abc-b^2d).$$

(*Idem*).

28. Eenige meters katoen worden verkocht met 11 % winst. Op 45 M wordt 2,97 gld. gewonnen en $\frac{7}{8}$ van de partij brengt bij verkoop 233,10 gld. op. Hoeveel Meter waren er en wat was de inkoopprijs per Meter? (*Idem*).

Digitized by Google

LUBBERHUIZEN, Het Opstel. Stijlleer voor het voortgezet onderwijs f 0,45
Dr. C. TE LINTUM. Overz. der Vaderl. Geschiedenis. Met vele illustr. „ 1,25
id. Vaderlandsche Geschiedenis voor H. B.S., Gymnasia, Kweek- en Normaalsch., Vaksch. en zelfstandige Studie, 2 dln., à „ 1,25
id. Leerboek der Algemeene Geschiedenis met illustraties, deel I „ 1,25
dl. II f 1,75, dl. III f 1,65.
Dr. J. J. MOOLHUIZEN en J. C. BOUWMEESTER, Met z'n Vieren, Een viertal leesb. voor Gymn., H. B. S., Kweek- en Normaalsch. dl. I 2e dr. f 0,75, geb. f 1,05, dl. II 2e dr. f 0,90, geb. f 1,20, dl. III 2e dr. f 1,20, geb. f 1,50, dl. IV f 1,20, geb „ 1,50
Dr. D. C. NIJHOFF, Staatk. Gesch. van Ned., 2 dln., ing. f 3,75, geb. „ 4,75
F. NICOLAY, Slecht Opgevoede Kinderen. Naar de 16e Uitg. bew. door Mevr. Goudsmit-Polano met een inleidend woord van J. Gehlk ing. f 1,80, geb „ 2,40
Dr. A. C. OUDEMANS, Beknopte Zak- en Schoolflora geb. „ 1,65
id. Leerboek der Natuurlijke Historie. I Dierkunde. Leerboek voor a. s. Onderwijzers. Handleiding bij het onderwijs aan Middelbare Scholen en Gymnasia in Nederland en zijne Koloniën. f 2,90, Geb. „ 3,40
H. DE PIERRES, La Littérature Française au XIXe Siécle. Recueil de morceaux choisis à l'usage des gymn. et des écoles moyennes. Deuxiéme édition, revue et augmentée ing. f 1,90, geb. „ 2,50
C. PLOETZ, Lectures Choisies. Chrestomathie française „ 1,25
Dr. O. SCHMEIL, Leerb. der Dierkunde. Naar het Duitsch. Voor Nederl. bew. door Dr. P. G. Buekers. 1e stuk: Zoogdieren „ 0,65
2e stuk: Vogels, Kruipende dieren, Tweeslachtige dieren en Vlaschen. f 0,95, 3e stuk: Geleedpootige- en Weekdieren, Wormen, Stekelhuidige-, Holte- en Vaardieren „ 1,10
compl. ing. f 2,70, geb. „ 3,25
Dr. O. SCHMEIL, Leerboek der Plantkunde. Voor Nederland bewerkt door Dr. P. G. Buekers. 1e stuk f 1,40, 2e stuk „ 1,40
R. SCHUHLING, Beknopt Leerb. der Aardrijksk., 2e dr., ing. f 2,55, geb. „ 3,—
id. Onze Aarde I. Nederl. en Algem. Aardrijksk. 2e dr. f 0,70, gecart. „ 0,80
id. „ „ II. Europa, 2e verb. dr., ing. f 0,80, gecart. „ 0,90
id. „ „ III. De wereldd deelen buiten Europa en de Nederl. Koloniën in Oost en West, 2e verb. druk, ing. f 0,75, gecart. „ 0,85
id. Neerlands Koloniën. Bekn. handleiding ten dienste van het onderwijs. Met vele platen en figuren, benevens enkele schetskaarten. Ing. f 1,25, gecart „ 1,35
id. Algemeene Aardrijksk. ten dienste van het onderw. en voor zelfstudie. I. Lucht, Water, Land f 1,50, gecart. „ 1,60
II. Planten, Dieren, Menschen en Staten f 1,—, „ „ 1,10
R. SEAMER. Shakespeare's Stories „ 1,50
E. A. H. SEIPGENS, Hoogduitsche Spraakkunst voor eerstbeginnenden (als Inleiding tot de Hochdeutsche Sprachlehre für Niederländer) 3e verbeterde druk, nagezien door C. J. Vierhout „ 0,40
id. Oefeningen behoorende bij de Hoogduitsche Spraakkunst, 3e druk, nagezien door C. J. Vierhout „ 0,60
id. Hochdeutsche Sprachlehre für Niederländer, Zweite, durchgesehene und verbesserte Auflage „ 1,—
id. Uebungsaufgaben zur Hochdeutschen Sprachlehre für die Mittelklassen. Erstes Heft. Zweite Auflage f 0,80. Zweites Heft „ 0,60
id. Deutsches Lesebuch für die Niederländische Schule. 1e, 2e und 3e Teil. Prijs pr. Teil „ 1,25

MUSTERWERKE DER DEUTSCHEN LITERATUR

mit Noten und Erläuterungen

für Schule und Haus, Herausgegeben von E. A. H. SEIPGENS.

I. KARL GUTZKOW, Uriel Acosta, Trauerspiel in fünf Aufzügen „ 0,50
II. PAUL HEYSE, l'Arrabbiata Novelle. Zweite Auflage „ 0,25
III. S. H. MOSENTHAL, Der Sonnwendhof. Volksschauasp. in 5 Aufzüg. „ 0,60
IV. FR. VON SCHILLER. Wilhelm Tell, Ein Schauspiel in 5 Aufzügen „ 0,60
V. FRIEDRICH HALM, Der Fechter v. Ravenna. Trauersp. in 5 Azt. „ 0,60
Gecartonneerd per deeltje 5 cent hooger.

Digitized by Google

BIBLIOTHEK MODERNER DEUTSCHER LITERATUR.

für Schule und Haus. Herausgegeben von M. HORN.

Prijs per No. *f* 0,50, geb. *f* 0,90. Dubbele No.'s *f* 1,—, geb. *f* 1,50.

1: 2. J. V. VOS SCHEFFEL, Der Trompeter von Säckingen. Zweite Auflage.
3. G. FREYTAG, Die Journalisten. Zweite Auflage.
4. A. ROQUETTE, Waldmeisters Brautfahrt.
5. R. HAMERLING, Teut.
6. P. HEYSE, Siechentrost.
7. G. VON MOSER, Ultimo.
8. TH. STORM, Immensee. Auf dem Staatshof.
9. G. HAUPTMANN Kollege Crampton.
10. P. HEYSE, Unvergeszbare Worte.
11. G. KINKEL, Der Grobschmied von Antwerpen
12/13. F. W. WEBER, Dreizehnlinden.
14. E. v. WILDENBRUCH Kinderthränen.

J. A. SCHUTTE, Spreekwijzen aan het dagelijksch leven ontleend verklaard en toegelicht *f* 0,75

De Studeerende Onderwijzer, Tijdschrift voor de hoofdacte en vergelijkende examens, onder redactie van S. DE GAST Jzn. en H. VAN STRIEN en met medewerking van vele specialiteiten. 9e Jaargang. Prijs per Jaargang van 12 afl. *f* 5,20, fr. p. post „ 5,70

SNIJDERS, Dr., Handleiding b/h onderwijs in de Plant- en Dierkunde. 1e cursus. 3e druk „ 1,40
2e „ 2e „ „ 1,70
3e „ 2e „ (Het Menschelijk lichaam) „ 0,90

A. C. W. STARING, Gedichten, complete zorgvuldig herziene 8e druk ing. *f* 1,25, geb. „ 1,70

Dr. F. A. STOETT, De Hoofdzaken der Nederlandsche Spraakkunst, ten behoeve van Gymnasia en H. B. S., 4e druk „ 0,50

C. STOFFEL, Studies in English, I „ 4,50
id. Engelsch Leesboek I Proza, 2e druk „ 1,25
id. „ „ II Poëzie „ 1,25
id. „ „ v. aanvangsklassen I 2e dr. en II à „ 0,60
id. „ „ „ „ III 2e dr. „ 0,75

J. J. STOEL, Leerboek der Werktuigkunde ing. *f* 2,25, gecart. „ 2,35

K. F. SÜPFLE, Opstellen ter vertaling in het Latijn voor de jongste en Middelste Klassen der Gymnasiën, Naar de 18e Hoogd. uitgave opnieuw bewerkt door Dr. Bruins,
1e deel 5e druk *f* 1,40, 2e deel 4e druk „ 1,20

W. SWIJNENBURG, Studeeren en Repeteeren. Vragen en Opgaven bij het bestudeeren van „De School" „ 0,75

O. VEENSTRA, Engelsch Leer- en Leesboek, eene grammaticale directe methode „ 0,60

P. v. D. VELDE Mz., Touchstones. Engelsche Vertaaloefeningen voor meergevorderden „ 0,50

EELCO VERWIJS, Bloemlezing uit Middelnederlandsche Dichters, bezorgd door Dr. F. A. Stoett, 4 dln. samen „ 9,—

WUNDERLICH, Aardrijkskunde van Nederland, met kaartjes en graphische voorstellingen, 3e druk „ 1,35
id. Insulinde, Land en Volk van Nederlandsch Indië. Geïllustr. „ 1,50

E. ZUIDEMA, Hoofdpunten der Algemeene Geschiedenis. Handboek voor leerlingen van H. B. S., Gymnasiën en andere inrichtingen van voortgezet onderwijs „ 2,40

C. C. ZWETS, Vragen en Oefeningen naar aanleiding van Kooninga's Leerboek der Paedagogiek benevens proeven van bewerking tot het maken van Paedagogische Opstellen „ 0,75

J. G. ZIJLSTRA, Het Rekenonderwijs, 3e druk, ing. *f* 1,25, geb. „ 1,50
id. Het Leesonderwijs, 3e „ „ „ 1,25, „ „ 1,50
id. Beknopte Geschiedenis der Opvoedkunde, 3e druk, ing. „ 1,25
geb. „ 1,50

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

YC 22832

~~YC 22357~~

M329861

Digitized by Google

Digitized by Google